

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

Q
54
N23
ser. 4
v. 18-20
1951-53

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XVIII. — (Anno XC)

gennaio - dicembre 1951



NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1951

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XVIII. — (Anno XC)

gennaio - dicembre 1951



NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE

Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568

1951

nizzando il solitario fisico matematico autore delle nuove incomprensibili equazioni che dovrebbero sconvolgere il mondo, abbiano puramente e semplicemente un valore scientifico, e non, come invece comunemente si crede, un valore filosofico, nel senso che esse risolvano l'insolubile problema dell'universo, sul quale per tanti secoli si affannarono i più grandi spiriti della umanità. Un'altra nota, la quale ha per oggetto *Le mosche in descrizioni antiche e moderne*, porta alla dimostrazione che durante i quattro millenni di storia, in cui gli uomini hanno assunto tante mutazioni, le mosche si sono mantenute relativamente stabili, nè sono cambiate le relazioni di convivenza, pacifiche od ostili, tra uomini e mosche, malgrado l'accresciuta potenza moschicida moderna dell'uomo. La terza nota ha lo scopo di rivendicare ad alcuni italiani, e particolarmente a Pietro DELLA VALLE (1586-1652), il merito di avere, come pionieri, dato all'Europa la prima conoscenza della civiltà e della cultura dell'India. Lo scritto, *L'India nelle lettere di Pietro Della Valle*, costituisce una necessaria precisazione e un'opportuna rettifica a varie pubblicazioni francesi apparse recentemente, secondo le quali le lingue, le religioni, le filosofie e le credenze indiane sarebbero state diffuse, ed avrebbero avuto notevole influenza sull'Occidente, ad opera soprattutto di scrittori inglesi, tedeschi e francesi.

Ricordando ora i contributi astronomici, devo segnalare una memoria del prof. Eugenio GUERRIERI, *Catalogo di 750 stelle zenitali per Capodimonte da osservazioni meridiane al cerchio di Repsold*, che apre il nuovo volume degli Atti. L'autore, che già nel 1939 aveva pubblicato nel medesimo periodico un suo primo catalogo di stelle, ha compiuto ora un lavoro, di molto maggiore mole e di più ampio interesse scientifico, nel quale, dopo aver fornito i dati indispensabili a chiarire i metodi delle osservazioni e delle successive riduzioni ed a fornire gli elementi per giudicare l'attendibilità dei risultati, ha esposto il Catalogo di 750 stelle osservate in una fascia di cielo che va da 30' a nord fino a 30' a sud dello zenit di Capodimonte e comprese tra le grandezze 4.3 e 8.5 di quella regione.

Molti, ed importanti, sono i lavori riflettenti le scienze matematiche, sia pure che applicate.

Facendo seguito alle cinque note precedentemente pubblicate nel Rendiconto degli anni 1946 a 1949, sopra le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso*, il consocio SPAMPINATO ha, sullo stesso argomento, pubblicato una sesta parte, nella quale introduce le prime nozioni relative alla Geometria algebrica d'indice di algebricità qualunque, in particolare virtuale o ideale, sopra una superficie algebrica ordinaria. Due successive note dello stesso autore sono quelle che si riferiscono alle *Corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un S_r ipercomplesso*. Nella prima di esse s'introducono le nozioni fondamentali relative alle corpovarietà e varietà algebriche ed iperalgebriche di un S_r ipercomplesso legato ad una qualunque algebra, di ordine n , dotata

di modulo, definita in un corpo numerico qualunque. Nella seconda s'introducono le rappresentazioni analitiche delle corpovarietà iperalgebriche, ed il concetto di *Geometria corpobirazionale* in un S_r legato ad un'algebra, definita nel corpo dei numeri complessi, di ordine qualunque e dotata di modulo.

In una nota *Sui gruppi p supersolubili*, il nostro socio corrispondenti ZAPPA esamina in quale misura si estendano, e come si modifichino per i gruppi p-ipersolubili, introdotti recentemente da S. ČUNIHIŃ, le proprietà date da O. ORE a caratterizzazione dei gruppi supersolubili.

Al dott. Angelo FADINI sono dovute quattro note, la prima delle quali è diretta a determinare le congruenze dirette dell' S_3 proiettivo, definite nel corpo numerico finito $C[2]$, costituenti *La prima rappresentazione degli S_3 proiettivi legati a due algebre doppie definite nel corpo $C[2]$* , con le tabelle di moltiplicazione identiche a quelle delle algebre dei numeri bireali e duali o bicomplessi e biduali, definite rispettivamente nel corpo reale o complesso. La seconda nota, su *Le corpoproiettività dell' S_3 proiettivo legato all'algebra A* , ha lo scopo di dimostrare, seguendo il metodo generale indicato dal prof. SPAMPINATO, che le corpoproiettività dell' S_3 legato all'algebra A , di ordine 2, dotata di modulo, definita nel corpo numerico $C[2]$, o sono proiettività o sono trasposizioni. Nella terza, dal titolo *La Riemanniana del piano triduale*, si caratterizza nell' S_3 complesso il sistema lineare di ipersuperficie cubiche invarianti rispetto al sistema lineare di proiettività formanti gruppo determinato dall'algebra dei numeri triduali, e si studia la varietà W Riemanniana del piano triduale. La quarta nota, *La prima rappresentazione dell' S_3 proiettivo legato ad un'algebra doppia definita nel corpo $C[3]$* , che fa seguito ad un'analoga nota relativa al corpo numerico $C[2]$, serve a determinare il gruppo equivalente dello spazio legato al corpo $C[3]$ relativo all'algebra A , definita in tale corpo, e con la tabella di moltiplicazione dei numeri biduali.

Nel suo lavoro sopra *Il metodo della proiezione isometrica*, il prof. Mario GIOVANARDI introduce, nel campo della geometria descrittiva, un nuovo metodo, nel quale si rappresenta una figura dello spazio riferendola a due piani perpendicolari fra loro, mediante tre particolari proiezioni, e raggiunge con esso il duplice vantaggio di dare una chiara idea della forma della figura medesima e di farne determinare con grande facilità le dimensioni.

Sempre nel campo della geometria descrittiva, è da ricordare ancora una nota del dott. Pio BALSIMELLI su *Le corpoproiettività dell' S_3 biduale nelle tre rappresentazioni complesse*, nella quale, introdotte le corpoproiettività dell' S_3 biduale, si determinano le equazioni delle trasformazioni ad esse corrispondenti negli spazi della congruenza, del cono e nel piano della terza rappresentazione.

In altro settore delle matematiche pure, sono da ricordare tre note del dott. Federico CAFIERO. Nella prima, *Sul fenomeno di Peano nelle equazioni*

differenziali ordinarie del primo ordine, l'autore ottiene interessanti risultati nel fenomeno di Peano relativo ad una equazione differenziale del primo ordine variabile in una famiglia di equazioni e ad un punto iniziale variabile in un rettangolo, dimostrando che detto fenomeno può presentarsi al più per un'infinità numerabile di equazioni della famiglia e per un insieme di misura nulla di punti iniziali. Nella seconda, sul medesimo argomento, vengono riprese e continuate, con interessanti complementi, le considerazioni svolte nel precedente lavoro. Nella terza, *Sulla classe delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura lebesguiana nulla*, si caratterizzano nello spazio astratto delle equazioni del primo ordine quelle equazioni, i cui punti di Peano costituiscono un insieme di misura nulla.

In una nota, *Sulla convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni associati ad un problema ai limiti relativo ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine*, il dott. Donato GRECO ha studiato un problema ai limiti, di nuovo tipo, per una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, apportando notevoli complementi ad altri suoi precedenti risultati sull'argomento. Particolare interesse presenta la precisazione delle condizioni per la convergenza degli sviluppi di serie collegati col problema.

Passiamo ora dal campo delle matematiche pure a quello delle applicazioni del calcolo.

Allo scopo di far conoscere *La maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica matematica* tende una nota del prof. Gaetano FICHERA, che consente di arrestare il procedimento di approssimazione ad un opportuno stadio. Mediante un'originalissima idea, l'autore perviene a tali maggiorazioni, indicandone l'applicazione ai problemi di integrazione dell'equazione di LAPLACE e dei sistemi di equazioni della teoria matematica dell'elasticità.

In una memoria della dott. Maria Josepha DE SCHWARZ sopra la *Determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso* — attualmente in corso di stampa nel volume degli Atti — si danno vari metodi per la risoluzione del problema indicato nel titolo, e si applicano tali metodi, fino alle ultime determinazioni numeriche, calcolando 18 frequenze e le linee nodali corrispondenti di un'ellisse con gli assi 1 e $1/2$, giungendo a risultati di notevole interesse e novità.

È da ricordare ancora una nota della dott. Maria BERNABINI, *Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità piana in coordinate curvilinee*, nella quale si dimostra un teorema relativo al modo di ottenere tutte le soluzioni delle equazioni dell'elasticità piana in coordinate curvilinee isoterme, e di tale risultato si fa applicazione al caso della corona circolare eccentrica.

Non sono neppure mancati lavori di scienza delle costruzioni.

In una nota *Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi*

sottili ribassati, il dott. Vincenzo FRANCIOSI ha preso in esame il caso di un arco parabolico a due cerniere soggetto ad un carico uniforme e a due forze, uguali e contrarie, alle imposte; e, sviluppando un procedimento analogo a quello del KRAIL per le aste presso-inflesse, è pervenuto ad una equazione integrale di FREDHOLM, di seconda specie non omogenea.

Due altre note sono dovute al dott. Elio GIANGRECO. Una di esse, *Sulla instabilità nell'equilibrio delle strutture scatolari*, riguarda un problema di notevole interesse, data l'importanza che nella tecnica costruttiva vanno sempre più acquistando le strutture in foglio; l'altra riflette le *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico, con un'applicazione all'asismica*, studiando per un blocco rigido immerso in un terreno di fondazione le oscillazioni libere nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile, e determinando le massime forze d'inerzia in base alle quali andrebbe verificata la stabilità della struttura nell'ipotesi di un prefissato effetto sismico pericoloso.

Ad un diverso campo dell'ingegneria, riguardante le ricerche idrauliche, si riferisce la nota del prof. Andrea RUSSO SPENA *Su alcune proprietà caratteristiche delle reti*, nella quale si dimostra, tra l'altro, che in una rete di distribuzione di acqua, o di fluidi incompressibili, le condizioni di deflusso effettive sono accompagnate da dissipazioni di energia minime. Vengono in tal modo ad estendersi alle reti di distribuzione dei fluidi alcuni principî già noti in elettrotecnica.

A particolari ricerche di chimica applicata si riferiscono quattro note del dott. Riccardo SERSALE. Nella prima di esse, l'autore espone i risultati delle sue *Indagini intorno ad un caolino proveniente dal tenimento di Serrenti (Cagliari)*, descrivendo le caratteristiche costituzionali e tecnologiche di quella roccia, che si è rivelata particolarmente adatta alla produzione di materiali refrattari. Nella seconda sono riportati i risultati de *Gli esami metallografico e termodilatometrico nella valutazione della qualità dei tubi di ghisa centrifugata*, e viene stabilita la causa delle deficienze riscontrate nel collaudo della pratica applicazione di detti tubi, attribuendola ai trattamenti termici di fabbricazione, non opportunamente curati. Nella terza, riguardante *Indagini sulla dilatazione reversibile di alcune rocce silicee*, è analizzato il fenomeno dell'apparente scomparsa del quarzo e delle altre varietà di silice in alcuni campioni di arenaria silicea sottoposti a trattamento termico. Nella quarta, *Sull'attivazione termica delle bauxiti*, viene esaminato il comportamento termico di due bauxiti campane (Cusano Mutri e Dragoni) differenti tra loro per il contenuto di ferro, e si conferma che la disidratazione avviene intorno ai 480° con brusca dilatazione permanente, che determina l'alta porosità acquistata dal solido, e che l'ossido risultante è ossido γ , il quale solo a temperature superiori ai 900° si trasforma nell'ossido stabile: $\alpha \text{ Al}_2\text{O}_3$.

Per ragioni di affinità ricordiamo ora i lavori petrografici e vulcanologici, prima di passare a quelli geologici e paleontologici.

Un notevole contributo alla *Petrografia chimica dei tufi flegrei* ci ha dato il consocio SCHERILLO, trattando in questa prima nota del *tufo giallo* proveniente dalla zona napoletana compresa tra Castel S. Elmo, Villanova e Mergellina, ed anche da qualche altra località flegrea, e riferendo i risultati delle sue numerose analisi quantitative, estese pure ad alcune pomici e scorie incluse nei tufi predetti.

A particolari fenomeni di attività del nostro Vesuvio durante l'ultimo decennio si ricollega una nota del consocio Giuseppe IMBÒ, il quale ha trattato, più particolarmente, di *Manifestazioni effusive subterminati della primavera del 1942* e di *fenomeni termici attuali interessanti la medesima zona del versante meridionale vesuviano*. Data notizia di una eruzione subterminale verificatasi nella primavera del 1942, l'autore cerca di determinarne la causa, che pone in relazione a fratture, le quali avrebbero interessato il sistema meridionale di fenditure del 1906; ed esposte le vicende termiche della zona, che a cominciare dal 1946 ha presentato manifestazioni di termicità relativamente alta, spiega il fenomeno come dovuto alla attività di masse magmatiche, relativamente degassate, staccatesi dalla colonna nel corso della fase preparatoria dell'eruzione del 1944 ed annidatesi nel sistema di fenditure del 1906.

A speciali indagini meteorologiche si riferisce una nota del dott. Cristofaro MENNELLA dal titolo *Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli Capodimonte*, nella quale l'autore, fondandosi sui dati della serie pluviometrica 1866-1945 dell'Osservatorio di Capodimonte, stabilisce raffronti fra differenti distribuzioni annuali delle precipitazioni, giungendo alla conclusione che la distribuzione maggiormente idonea a mettere in evidenza le caratteristiche più spiccate del fenomeno è quella che egli chiama per annate pluviometriche: esse vanno dal settembre all'agosto successivo e decorrono dal minimo principale di un anno al minimo principale dell'anno seguente.

Una nota geologica è dovuta al dott. Vincenzo MINIERI, il quale ha descritto — dal punto di vista morfologico, stratigrafico, paleontologico e genetico — *La terrazza della Starza nei Campi Flegrei*, che si estende lungo il litorale flegreo dalla località Gerolomini presso Pozzuoli fino alla collina di Tritoli e che si è costituita essenzialmente col disfacimento dei tufi trachitici del vicino vulcano del Gauro, e col successivo accumularsi di quei materiali in ambiente litorale, com'è chiaramente dimostrato dai caratteri dello strato fossilifero inglobatovi, ricco di numerose specie di foraminiferi, celenterati e molluschi, tutti viventi.

Fra le ricerche paleontologiche, sono da segnalare due lavori. Uno, del socio D'ERASMO, è una nota preliminare *Sopra un teschio di Bos taurus primigenius Bojanus recentemente rinvenuto a Pignataro Interamna*,

presso Cassino, nel noto giacimento quaternario che ha già fornito a varie riprese, da un quarto di secolo, numerosi rappresentanti di grossi mammiferi pleistocenici, fra cui specialmente abbondanti e caratteristici i resti di *Elephas antiquus italicus*, *Hippopotamus amphibius*, *Cervus elaphus* ecc., associati ad avanzi, più rari ma ugualmente tipici, dell'industria umana primitiva.

L'altro lavoro, della dott. Maria MONCHARMONT ZEI, fornisce la illustrazione di un cranio di una nuova specie di *Eurhinodelphis della pietra lecce*, distinta col nome di *Eurh. salentinus* e proveniente dal Miocene medio di Melpignano, in Terra d'Otranto.

Prima di concludere la nostra breve rassegna, dobbiamo ricordare ancora le *Ricerche di spettrofotometria di fluorescenza del siero di sangue umano normale*, compiute dai professori Baldassarre DE LERMA e Gennaro ARPINO, le quali dimostrano come possa applicarsi all'indagine biologica un particolare e delicato criterio di analisi fisica. Esse infatti hanno permesso di mettere in evidenza l'uniformità della distribuzione spettrale dell'energia nel flusso di fluorescenza del siero di sangue umano normale, e di concludere che, in rapporto a tale uniformità di composizione spettrale, legata alle emissioni dei costituenti biochimici fluorescenti del siero, il flusso di fluorescenza del siero di sangue umano normale acquista il significato di una nuova costante chimico-fisica del sangue stesso.

Avremmo così esaurito il nostro compito, se non ci rimanessero da ricordare ancora altre manifestazioni di attività: giacchè la nostra Accademia ha continuato a seguire con l'abituale interesse tutti i convegni scientifici più importanti ed ha voluto partecipare alle onoranze tributate ad insigni studiosi. Così, ad esempio, si è fatta rappresentare dal consocio PICONE al Congresso internazionale dei matematici che ebbe luogo a Cambridge Mass. nell'agosto-settembre, e dal consocio CARNERA alla celebrazione del 250° anniversario della fondazione dell'Accademia Tedesca delle Scienze in Berlino; e non ha mancato di prender parte, con propri delegati, alle onoranze tributate in Roma a Francesco SEVERI, in Bevagna alla memoria di Filippo SILVESTRI e in Ancona alla memoria di Vito VOLTERRA.

Nello stesso anno si sono stabiliti nuovi cambi con varie Accademie straniere, e se ne sono ripristinati parecchi altri, che la guerra aveva fatalmente interrotti. Ma poichè quasi tutte queste forme di attività sono strettamente legate con le possibilità finanziarie, le quali hanno finora imposto criteri di rigida economia non solo alla nostra, ma anche alle altre consorelle Accademie della ex Società Reale, ci siamo associati pienamente al giusto richiamo, fatto nello scorso maggio dal sen. Guido CASTELNUOVO al Senato, circa la necessità di aumentare convenientemente il contributo ordinario statale in favore delle più gloriose Accademie regionali italiane;

e, mentre salutiamo con piacere la promessa del Ministro GONELLA, che ci fa bene sperare per l'avvenire, ricordiamo a titolo di onore il Banco di Napoli e la Camera di Commercio, Industria ed Agricoltura della provincia di Napoli, che colla elargizione di un sussidio ci hanno intanto permesso di riprendere la pubblicazione degli Atti, ormai da vari anni interrotta.

Un altro passo verso la completa normalizzazione è costituito dalla decisione, presa nel Consiglio di presidenza dello scorso dicembre, di ripristinare, a cominciare dal 1951, i vari concorsi a premio, opportunamente elevandone la quota in rapporto all'attuale valore della moneta. Sarà a noi tutti motivo di particolare soddisfazione vedere ricordati ed onorati nella maniera più degna, e alla loro memoria certo più gradita, i nomi di Agostino OGLIALORO, Gabriele TORELLI, Luigi SEMENTINI, e sarà sprone alla ricerca scientifica da parte dei giovani studiosi il cimentarsi in questa nobile gara.

Ed ora un ultimo cenno riguardante le variazioni nella compagine sociale.

Alla carica di vice-presidente per il 1951 venne eletta la socia Maria BAKUNIN.

Una grave perdita ebbe a subire l'Accademia nello scorso anno 1950. Il 29 novembre cessò di vivere in Roma, dopo breve malattia, il consocio Biagio LONGO, emerito di Botanica nel nostro Ateneo, che dal 21 giugno 1930 apparteneva alla Sezione di Scienze Naturali in qualità di socio ordinario residente e dal 4 giugno 1949 come socio ordinario non residente. Nato a Laino Borgo, in provincia di Cosenza, nel 1872 e laureato in Scienze naturali a Roma nel 1895, egli iniziò la sua carriera scientifica come assistente, aiuto, libero docente ed incaricato nell'Università di Roma, dove rimase fino al 1906, fino a quando cioè ottenne, per concorso, la cattedra di Botanica dell'Università di Siena. Di là passò a Pisa nel 1915, e da Pisa a Napoli nel 1929, allorchè, dopo la morte di Fridiano CAVARA, fu chiamato alla direzione del nostro Orto Botanico e dell'annessa Stazione Sperimentale per le piante officinali. Qui egli rimase per circa 18 anni, finchè non fu obbligato a lasciare l'insegnamento per sopraggiunti limiti di età; e fra noi non è chi non ricordi il fervido attaccamento ch'Egli ebbe sempre per il suo Istituto, che attrezzò con criteri scientifici moderni in nuovi e più adatti locali, ed il forte impulso che seppe dare alla Stazione Sperimentale per le piante officinali. Il suo successore nella cattedra, prof. Giuseppe CATALANO, ha cortesemente accolto l'invito di parlare, colla necessaria competenza e larghezza, dell'operosità didattica e dei meriti scientifici di Biagio LONGO in una prossima commemorazione; ma anche in questo fugace e disadorno cenno odierno chi vi parla non può fare a meno di ricordare la costante ed appassionata tenacia con cui Egli difese, contro ogni manomissione o minaccia di manomissione, il suo Orto Botanico, il

profondo dolore che soffrì allorchè le vicende dell'occupazione post-bellica vi lasciarono gravi e durevoli ferite, la passione e il disinteresse con cui curò l'allestimento della flora africana alla Mostra delle Terre d'Oltremare. Della sua produzione scientifica, svolta in svariati campi della Botanica, mi limito a citare le ricerche sulla flora calabrese, sulle Conifere italiane, sulle Cucurbitacee e sul significato del percorso intercellulare del tubetto pollinico, sulla poliembrionia e sulla partenocarpia, sulla coltivazione delle piante medicinali, sulla priorità della scoperta dell'AMICI nelle ricerche sopra la fecondazione delle piante, ecc.; e, sicuro d'interpretare l'unanime sentimento dei presenti, mando alla venerata memoria del caro Collega scomparso il doveroso omaggio del nostro sempre vivo rimpianto.

A colmare i vuoti, che in questi ultimi anni erano divenuti particolarmente numerosi nella categoria dei soci corrispondenti, l'Accademia ha provveduto, nello scorso giugno, con molteplici nomine.

Il decano dei nostri corrispondenti, Luigi LOMBARDI, professore emerito della Università di Roma, è stato eletto socio ordinario non residente nella Sezione di Scienze naturali; e soci corrispondenti nazionali nella medesima sezione furono nominati sei colleghi ordinari di questa *alma mater studiorum*: i professori CATALANO Giuseppe, BERETTA Ugo, ORRÙ Antonietta, MONTALENTI Giuseppe, IACOPETTI Mario e PANIZZI Luigi. Nella Sezione di Scienze matematiche annoveriamo pure altri cinque nuovi soci corrispondenti nazionali, e cioè i proff. COLUCCI Antonio, GALLI Adriano, SCORZA DRAGONI Giuseppe, TOLOTTI Carlo e ZAPPA Guido.

Accresciute così le forze vive del Sodalizio, possiamo guardare con fiducia l'avvenire, sicuri che le novelle energie coopereranno efficacemente a mantenere viva la fiamma che ci venne trasmessa dai nostri maestri ed inalterata la nobile ed ormai secolare tradizione, che ha reso altamente benemerita degli studi l'Accademia nostra.

NOZIONI INTRODUTTIVE ALLA TEORIA DELLE IPERSUPERFICIE ALGEBRICHE
DI INDICE n DELL' S_r PROIETTIVO COMPLESSO

Nota VII del socio ordinario Nicolò Spampinato

(Adunanza del dì 13 gennaio 1951)

Sunto. — In questa VII nota, facendo sèguito alle sei precedenti ¹⁾, s'introduce il tipo generale di determinazione di una ipersuperficie W_{r-1} dell' S_r proiettivo complesso, con l'indice di algebricità n , con la funzione numerica ad essa legata (ad n valori razionali relativi) definita in un insieme più generale di quelli finora usati. Ne segue un nuovo tipo d'intersezione di due o più ipersuperficie: quello *per eliminazione* [oltre quelli già introdotti *per subordinazione e per moltiplicazione*] pervenendo al tipo generale di varietà algebrica W_k , di indice di algebricità n (in particolare *virtuale o ideale*) con la funzione numerica definita in un insieme di coppie punto-falda t -dimensionale.

47. *Falde t -dimensionali semplici, multiple e generati di S_r .*

Nel n. 30 abbiamo introdotto il concetto di ramo semplice, multiplo o generale al fine di passare dalla *prima determinazione* di una W_{r-1} , di indice di algebricità n :

$$(1) \quad W_{r-1} = [J_{r-1}, N(X)]$$

col *sostegno* nell'insieme algebrico ²⁾ J e la funzione numerica $N(X)$ definita nell'insieme dei punti X di S_r , a due altre determinazioni (*seconda e terza*) della W_{r-1} , del tipo:

$$(2) \quad W_{r-1} = [J_{r-1}, N(X, a)]$$

$$(3) \quad W_{r-1} = [J_{r-1}, N(X, p)]$$

che differiscono dalla prima solo per l'insieme dove è definita la funzione numerica associata. Nel secondo tipo tale funzione è definita nell'insieme

¹⁾ SPAMPINATO N., *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso*, Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. XIV, XV, XVI (1946-47 48-49). Note I. a VI. — Tali note contengono i n. da 1 a 46. Questa nota s'inizia pertanto col n. 47.

²⁾ Nota I, n. 2.

$S_r(X, a)$ delle coppie *punto retta* di S_r ; nel terzo tipo ¹⁾ è definita nell'insieme $S_r(X, \rho)$ delle coppie *punto ramo* di S_r . È di questa terza determinazione che ci siamo serviti in seguito ²⁾ per introdurre, nel campo delle ipersuperficie algebriche W_{r-1} d'indice di algebricità qualunque, i *primi due tipi d'intersezione*:

1° *L'intersezione per subordinazione* di una W_{r-1} con una ordinaria varietà algebrica di S_r .

L'intersezione per moltiplicazione di $r - k$ generiche ipersuperficie $W_{r-1}^{(i)}$ ($i = 1 \dots r - k$) di indici di algebricità n_1, \dots, n_{r-k} .

Vogliamo ora introdurre una *quarta determinazione* di una W_{r-1} [al fine di poter introdurre un *altro tipo di intersezione*: l'intersezione per *eliminazione* di due o più ipersuperficie $W_{r-1}^{(i)}$ con lo stesso indice di algebricità].

Occorre in primo luogo estendere il concetto di ramo semplice o multiplo o generale, già introdotto in S_r , per avere una falda t -dimensionale semplice o multipla o generale di S_r .

Un ramo semplice o multiplo di S_r , con l'origine x' (x'_s) è definito da equazioni parametriche del tipo:

$$(*) \quad x_s = x'_s + a_{s1}z + a_{s2}z^2 + \dots \quad (s = 1, \dots, r+1)$$

[con le $r+1$ serie a secondo membro convergenti in un intorno (circolare) di centro $z=0$ nel piano di GAUSS dove si suppone disteso il parametro complesso z].

Per definire una *falda t -dimensionale semplice o multipla* di S_r di origine $X'(x')$ basta sostituire nelle (*) alle serie, a secondo membro, di una variabile complessa z , serie di $t > 1$ variabili complesse z_1, \dots, z_t con i termini noti x'_s e con le condizioni di convergenza nell'intorno del punto $o(o \dots o)$ dell' S_r reale euclideo, dove si rappresentano le t -ple (z_1, \dots, z_t) di numeri complessi.

In modo analogo si estende il concetto di ramo generale di S_r in quello di *falda t -dimensionale generale* di S_r .

48 *Determinazione di una ipersuperficie W_{r-1} di indice di algebricità n con la funzione numerica definita nel campo delle coppie punto-falda t -dimensionale.*

Di una ipersuperficie (dell' S_r proiettivo complesso) W_{r-1} di indice di algebricità n , rispondente alla funzione algebrica semiomogenea $y = f(x_1 \dots x_{2+1})$

¹⁾ Nota IV, n. 31.

²⁾ Nota V, nn. 32, 33 e 34.

definita implicitamente ¹⁾ dall'equazione algebrica:

$$[1] \quad \varphi_0(x_j)y^n + \varphi_1(x_j)y^{n-1} + \dots + \varphi_n(x_j) = 0$$

si hanno già le tre determinazioni (1) (2) (3) del n. precedente, in cui le funzioni numeriche sono date da:

$$(1^*) \quad N(X) = \Phi [N_0(X), \dots, N_n(X)]$$

$$(2^*) \quad N(X) = \Phi [N_0(X, a), \dots, N_n(X, a)]$$

$$(3^*) \quad N(X) = \Phi [N_0(X, \rho), \dots, N_n(X, \rho)]$$

dove Φ è una determinata legge ²⁾ indipendente dalla ipersuperficie, che permette di calcolare gli n valori *razionali relativi* della funzione $N(X)$, quando sono dati i valori che assumono le n funzioni (ad un valore intero positivo o nullo) $N_0 \dots N_n$, determinate dalle $n+1$ funzioni razionali intere $\varphi_0(x_j), \dots, \varphi_n(x_j)$ nei tre casi in cui il campo sia rispettivamente quello dei punti X di S_r , delle coppie punto-retta $S_r(X, a)$, e quello delle coppie punto-ramo $S_r(X, \rho)$. Il valore assunto dalla funzione $N_i(X, \rho)$ nella coppia punto-ramo (X', ρ) , col ramo ρ di origine X' , definito dalle (*) è dato dal minimo esponente che ha la z nella serie che si ottiene sostituendo nel polinomio $\varphi_i(x_j)$ le x_j date dalle (*).

Ora se al ramo ρ sostituiamo, nelle considerazioni precedenti, la falda t -dimensionale ρ'_t di equazioni:

$$(**) \quad x_s = x'_s + \sum_{h_1 \dots h_s}^{0,1 \dots \infty} a^{(s)}_{h_1 \dots h_s} z_1^{h_1} \dots z_t^{h_t} \quad (s = 1 \dots r+1)$$

sostituendo nella $\varphi_i(x_j)$ si ha una serie nelle t variabili z_1, \dots, z_t . Il grado minimo dei termini a coefficiente non nullo ci dà il valore della funzione che indicheremo con $N_i(X, \rho'_t)$, nella coppia punto-falda t -dimensionale (X', ρ'_t) . Quindi, posto:

$$(4^*) \quad N(X, \rho_t) = \Phi [N_0(X, \rho_t), \dots, N_n(X, \rho_t)]$$

¹⁾ Nota I, nn. 3, 4.

²⁾ Nota II, n. 18. Lo studio di tale funzione numerica ad n valori razionali relativi è svolto nelle mie *Lezioni di Geometria Superiore*, vol. III, § 1 e 6 [Casa ed. Pironti, Napoli, Via Mezzocannone]. In tale vol. III è sviluppata la teoria in questione relativamente alle proprietà già preannunciate nelle note I, II, III e IV. I teoremi preannunciati nella nota V sono dimostrati nel vol. VI di dette *Lezioni di Geometria Superiore*, parte seconda.

resta definita la funzione $N(X, \rho_t)$, ad n valori razionali relativi, nell'insieme $S_r(X, \rho_t)$ delle coppie punto-falda t -dimensionale. È questa funzione che, associata all'insieme algebrico J_{r-1} , ci dà la quarta determinazione della suddetta ipersuperficie W_{r-1} , che indicheremo con:

$$(4) \quad W_{r-1} = [J_{r-1}, N(X, \rho_t)].$$

La media aritmetica degli n -valori di $N(X, \rho_t)$ è la *multiplicità d'intersezione* di ρ_t con W_{r-1} .

Si noti che: la W_{r-1} si può considerare determinata dalla $(n+1)$ *pl* ordinata di ipersuperficie algebriche ordinarie ¹⁾ di equazioni:

$$\varphi_0(x_i) = 0 \dots \varphi_n(x_i) = 0$$

nella loro 4^a determinazione:

$$V_{r-1}^{(4)} = [J^{(4)}, N_t(X, \rho_t)]$$

con le funzioni numeriche definite in $S_r(X, \rho_t)$.

49. L'intersezione per eliminazione di due o più ipersuperficie $W_{r-1}^{(4)}$ dello stesso indice di algebricità. Le W_h di una V_h .

Consideriamo in primo luogo due ipersuperficie ordinarie:

$$(5) \quad \begin{aligned} V_{r-1}^{(*)} &= [J_{r-1}^*, N^*(X, \rho_t)] \\ V_{r-1}^{**} &= [J_{r-1}^{**}, N^{**}(X, \rho_t)] \end{aligned}$$

nella loro quarta determinazione. Supponiamo che l'intersezione dei loro sostegni J_{r-1}^* ed J_{r-1}^{**} sia un insieme algebrico J_{r-2} ad $r-2$ dimensioni e che esse siano determinate dalle funzioni omogenee razionali intere delle x_j :

$$y^* = \varphi^*(x_j), \quad y^{**} = \varphi^{**}(x_j).$$

Sostituendo alle x_j le (**) si hanno due serie di potenze:

$$F^* = (z_1, \dots, z_t) \text{ ed } F^{**} = (z_1, \dots, z_t).$$

Le ridotte di grado m , uguagliate a zero, danno due equazioni che, nell' S_t euclideo complesso (supposto $t > 1$), rappresentano due ipersuperficie di ordine m la cui ordinaria molteplicità d'intersezione nel punto $z_i = 0 \dots z_t = 0$

¹⁾ Nota I, n. 20. Fra le I^v vi possono essere la Ω e la T .

ci dà un numero intero, non negativo, il cui valore, al crescere di m assume un valore che indicheremo con $N(X', \rho'_i)$, come valore assunto da una funzione numerica $N(X, \rho_i)$, definita in $S_r(X, \rho_i)$ per $X \equiv X'$ e $\rho_i \equiv \rho'_i$. Associando all'insieme algebrico J_{r-2} tale funzione $N(X, \rho_i)$ si ha la varietà V_{r-2} intersezione delle due ipersuperficie V_{r-1}^* e V_{r-1}^{**} date, nella determinazione in $S_r(X, \rho_i)$:

$$V_{r-2} = [J_{r-2}, N(X, \rho_i)].$$

Tale varietà si dirà *intersezione per eliminazione* delle due date ipersuperficie ordinarie, in detta determinazione.

Ciò premesso, siano date in S_r due ipersuperficie W_{r-1} e W_{r-1}^* dello stesso indice di algebricità n rispondenti la prima alla [1] e la seconda all'equazione:

$$[1^*] \quad \varphi_0^*(x_j) y^n + \varphi_1^*(x_j) y^{n-1} + \dots + \varphi_n^*(x_j) = 0$$

con le condizioni che $\varphi_i(x_i)$ e $\varphi_i^*(x_i)$ per $i = 1 \dots n-1$ sieno entrambe nulle o non nulle e per $i=0$, $i=n$ siano entrambe costanti o no. In corrispondenza avremo due $(n+1)$ -ple ordinate di ipersuperficie ordinarie fra le quali possono esservi la T e la Ω ¹⁾:

$$(6) \quad [V_{r-1}^{(0)}, \dots, V_{r-1}^{(n)}] \text{ e } [V_{r-1}^{*(0)}, \dots, V_{r-1}^{*(n)}]$$

rispondenti alle due $(n+1)$ -ple di forme $[\varphi_0, \dots, \varphi_n]$ e $[\varphi_0^*, \dots, \varphi_n^*]$.

Per ogni coppia di ipersuperficie $[V_{r-1}^{(i)}, V_{r-1}^{*(i)}]$ avremo, per quanto abbiamo premesso, una varietà algebrica ordinaria ad $r-2$ dimensioni $V_{r-2}^{(i)}$ (ovvero la Ω o la T) nella determinazione:

$$(7) \quad V_{r-2}^{(i)} = [J_{r-2}^{(i)}, N^{(i)}(X, \rho_i)] \quad (i = 0, \dots, n)$$

e quindi restano determinate in $S_r(X, \rho_i)$ le $n+1$ funzioni numeriche ad un valore $N^{(i)}(X, \rho_i)$.

Avremo allora in $S_r(X, \rho_i)$ la funzione numerica ad n valori razionali interi data da:

$$N(X, \rho_i) = \Phi[N^{(0)}(X, \rho_i), \dots, N^{(n)}(X, \rho_i)]$$

che si può, perciò, considerare determinata in $S_r(X, \rho_i)$ dalla $(n+1)$ -pla di varietà ordinarie:

$$(8) \quad [V_{r-2}^{(0)}, \dots, V_{r-2}^{(n)}].$$

¹⁾ Loc. cit. (6), vol. III, Parte III, § 6, n. 58.

Tale $(n+1)$ -pla si dirà *intersezione ordinata delle due $(n+1)$ -ple di ipersuperficie ordinaria* (6).

Se diciamo J_{r-2} la somma dei due insiemi $J_{r-2}^{(0)}$ ed $J_{r-2}^{(1)}$, associando ad J_{r-2} la funzione $N(X, \rho_t)$ sopra definita, si ha quell'ente che diremo *varietà algebrica W_{r-2} di dimensione $r-2$, di indice di algebricità n , intersezione per eliminazione di W_{r-1} e W_{r-1}^** e si porrà:

$$W_{r-2} = [J_{r-2}, N(X, \rho_t)].$$

Nel caso $n=1$ la W_{r-2} si dirà *virtuale*, essendo virtuali W_{r-1} e W_{r-1}^* . Se poi, per $n > 1$, queste sono *ideali*, cioè le $\varphi_i(x_j)$ e le $\varphi_i^*(x_j)$, per $i=1, \dots, n-1$ sono tutte identicamente nulle, e quindi la $N(X, \rho_t)$ risulta data da:

$$N(X, \rho_t) = \frac{1}{n} [N^{(n)}(X, \rho_t) - N^{(0)}(X, \rho_t)],$$

la W_{r-2} si dirà *ideale*.

NOTA I^a — In modo perfettamente analogo nell' S_r complesso si definiscono le W_{r-3} , W_{r-4} ecc. di indice di algebricità n , come intersezioni, per eliminazione, di 3, 4, ecc. ipersuperficie algebriche dello stesso indice di algebricità n ed, in generale, l'intersezione, per eliminazione, di due o più varietà W_k , W_k' , ... dello stesso indice di algebricità n .

NOTA II^a — Quanto è detto nei nn. precedenti, in relazione all' S_r complesso si può ripetere sostituendo:

a) all' S_r una varietà algebrica V_k di S_r , irriducibile o no, priva di parti multiple (cioè primitiva);

b) alle ipersuperficie V_{r-1} di S_r le V_{k-1} di V_k ottenute mediante intersezione per subordinazione di V_k con ipersuperficie V_{r-1} di S_r ;

c) alle falde t -dimensionali di S_r le falde t dimensionali di V_k ;

d) alle ipersuperficie W_{r-1} di S_r di indice di algebricità n , le W_{k-1} di V_k , di indice di algebricità n ottenute mediante intersezione per subordinazione di V_k con le W_{r-1} di S_r . Si perviene, così, al concetto generale di *varietà algebrica W_k di indice di algebricità n , della varietà algebrica ordinaria primitiva V_k di S_r , con la determinazione:*

$$W_k = [J_k, N(X, \rho_t)]$$

essendo J_k un insieme algebrico contenuto nel sostegno J_k di V_k e con la funzione $N(X, \rho_t)$ ad n valori razionali relativi, definita nell'insieme delle coppie punto-falde t -dimensionale di V_k .

TEMPERATURE D'IRRIGIDIMENTO DI ATTUALI LAVE ETNEE

Nota del socio ordinario Giuseppe Imbò

(Adunanza del dì 13 gennaio 1951)

Sunto. — Nel corso dell'attuale eruzione etnea, incominciata il 25 novembre 1950, sono state eseguite misure in sito di raffreddamento naturale lavico. Il valore della temperatura di irrigidimento, di circa 635° , inferiore di circa 30° rispetto a valori relativi a precedenti lave, giustifica l'anomalo comportamento dell'attuale eruzione in relazione: I) al caratteristico andamento effusivo; II) alla maggior durata dell'eruzione rispetto a quella abituale; III) all'assenza di fenomeni esplosivi terminali precedenti o concomitanti l'eruzione.

Per una sempre maggiore estensione delle ricerche ¹⁾ relative all'esistenza, ed all'eventuale variazione per uno stesso vulcano anche nel tempo, della già introdotta temperatura d'irrigidimento, sono state eseguite in situ analisi termiche di frammenti lavici nel corso dell'attuale eruzione etnea.

Il primo episodio dell'eruzione, manifestatosi poco prima delle 22^h del 25 novembre ultimo, consistette nella comparsa di fenomeni esplosivo-effusivi da bocche apertesi a circa quota 2600 in Valle del Leone. Per un graduale ma rapido prolungamento a valle della fenditura, interessante il versante orientale, ben presto cessarono i detti fenomeni e, quasi immediatamente dopo, si ebbe la definitiva localizzazione di fenomeni esplosivi ad una quota di circa 2400, mentre di quelli effusivi alla base della frattura a circa 2200 s. l. d. m.

Dalla data indicata, senza alcuna interruzione sino ad oggi (13 gennaio), e sempre dalla medesima bocca, è sgorgata una copiosa corrente lavica, con portata media prossima, ma non inferiore, ai $1000 \text{ m}^3/\text{min.}$, suddividentesi successivamente in numerose lingue seguenti nella Valle del Bove varie direzioni secondo direttrici segnate per lo più da depressioni del terreno.

Una caratteristica dell'attività effusiva attuale è rappresentata da un relativamente frequente arresto dei bracci o ramificazioni con successiva

¹⁾ G. IMBÒ, *A proposito di un'analisi termica relativa a lava etnea del 1947*, Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4^a, vol. XV, 1948, Napoli. — *Id. Importanza delle determinazioni delle temperature d'irrigidimento delle lave*, Bull. Volc., s. 2^a, vol. VIII, 1949, Napoli.

formazione di altri affiancantisi o sovrapponentisi ai precedenti (con la conseguenza ovvia della possibilità di un maggiore avanzamento) oppure seguenti un diverso percorso.

Rami meridionali si sono spinti sino ai margini dei centri di Milo e di Rinazzo, entrambi presso a poco a quota 700; mentre un ramo settentrionale nei primi di gennaio si è spinto, seguendo il solco della Cava Grande, sino a quota di circa 600 m., a S del centro di S. Alfio la Bara.

Con la valida cooperazione dei dott. Domenico ABBRUZZESE e Lorenzo CASERTANO, ai quali vanno i miei vivi ringraziamenti, sono state eseguite osservazioni di raffreddamento naturale lavico nei giorni 10 e 11 dicembre a quota 900 c., quasi al fronte dell'estremo ramo settentrionale, avanzante con velocità di circa 30 m/ora verso la zona di Fornazzo, da cui distava circa 800 m. Il giorno successivo 12 dicembre però il ramo era già fermo.

Per le misure si sono scelti frammenti lavici relativamente grossi, staccantisi spontaneamente dal margine della colata ed in cui fu ancora possibile introdurre l'estremità della pinza per circa 3 o 4 cm in modo da risultare rivestita da una guaina dello spessore di alcuni centimetri. I valori ottenuti, ai quali sono state apportate le dovute correzioni (giunto freddo e correzione di scala), figurano, distintamente per le tre serie eseguite, nel seguente quadro in cui il tempo, espresso in minuti, è contato a partire da un istante successivo a quello dell'inizio dell'osservata diminuzione di temperatura.

I^a Serie — 10 dicembre 1950

0 ^m 717°	5 ^m 654°	10 ^m 622°
1 706°	6 647°	11 620°
2 692°	7 635°	12 618°
3 682°	8 630°	13 618°
4 665°	9 625°	14 617°

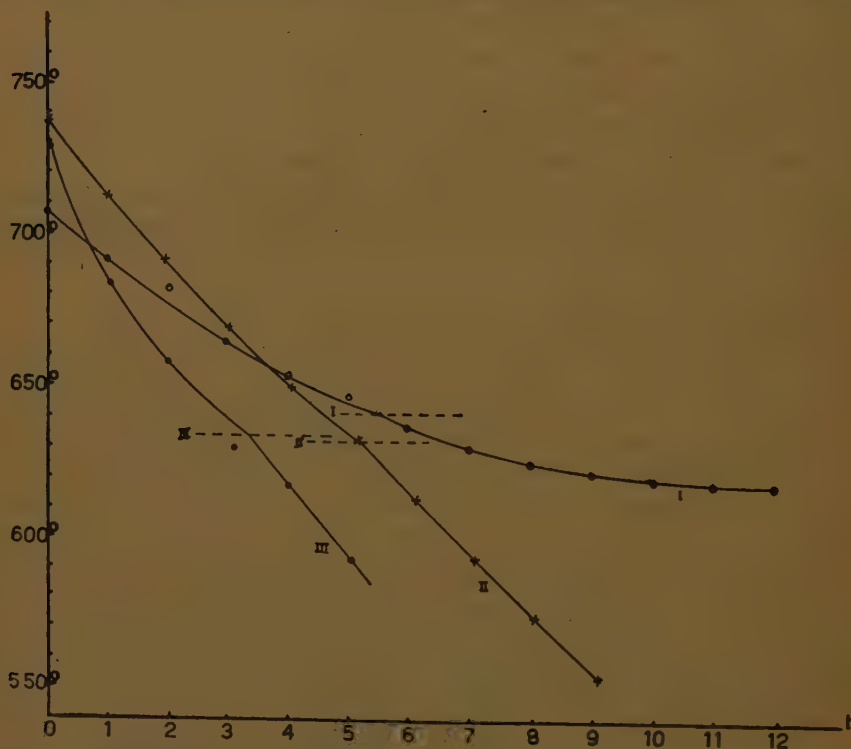
II^a Serie — 11 dicembre 1950

0 ^m 936°	7 ^m 786°	14 ^m 634°	21 ^m 507°
1 916°	8 759°	15 613°	22 493°
2 903°	9 737°	16 593°	23 476°
3 877°	10 713°	17 575°	24 462°
4 859°	11 692°	18 554°	25 450°
5 838°	12 669°	19 541°	30 375°
6 809°	13 651°	20 515°	32 262°

III^a Serie — 11 dicembre 1950

0 ^m	733°
1	684°
2	659°
3	629° (?)
4	618°
5	593°

Si fa rilevare innanzitutto, che in occasione della seconda serie, fu determinata anche la temperatura del blocco all'istante del distacco, ritenuta presso a poco eguale o lievemente superiore a quella assunta dal giunto caldo in condizione di stazionarietà, della durata di oltre un paio di minuti, precedente l'inizio della discesa termica. Il valore ottenuto fu di 937°.



Variazioni della temperatura (in °C) nel tempo (in min.) per tre frammenti lavici. Il tempo iniziale per le singole curve si riferisce a quello delle tavole cui corrisponde un valore di $T < 7000$ e successivo all'inizio dell'osservato raffreddamento.

Nei riguardi invece della temperatura d'irrigidimento, limitando l'analisi, per quanto si è detto nella precedente nota, ai soli valori inferiori a 700°, dalle tavole, e più evidentemente dai grafici (v. figura) (specie da quello relativo alla seconda serie, che offre maggiore garanzia in considerazione

delle più idonee condizioni di lavoro) emerge nettamente nei tre casi l'esistenza del flesso, a temperature rispettivamente all'incirca di 642° , 634° , 635° . Nel terzo caso non è stato invero considerato il valore corrispondente al terzo minuto (nel quadro figura con punto interrogativo), in quanto risulterebbe affetto da probabile errore di lettura.

Mentre da un canto emerge la relativa concordanza dei tre valori con scarti tollerabili (sia per eventuali errori giustificati dalle condizioni di osservazioni, sia per eventuale effettivo variato comportamento, seppure lieve, tra i campioni esaminati); d'altro canto risulta sensibile il divario col valore di 660° - 680° ottenuto per lave etnee sia del 1923 che del 1947 in base a sole misure: in laboratorio nel primo caso; in laboratorio ed in situ nel secondo.

In base alla suggerita interpretazione del flesso nelle curve di raffreddamento, la spiegazione della riscontrata differenza si avrebbe in un più basso valore, a parità di temperatura, del coefficiente di viscosità per le lave attuali rispetto a quelle precedenti esaminate.

Tale deduzione consentirebbe di avere a sua volta una giustificazione dell'indicato comportamento effusivo, per l'interpretazione del quale invero, se non possono ritenersi estranee sia l'ubicazione delle bocche che le particolari condizioni delle zone invase, devono essere prese in considerazione anche le condizioni fisico-chimiche delle masse fluenti e particolarmente del coefficiente di viscosità. Risulta infatti ovvia la deduzione che la persistenza del fenomeno cristallogenetico fin ad una più bassa temperatura, nel rivelare una relativamente maggiore scorrevolezza della lava, possa dare nello stesso tempo la spiegazione da un canto dell'allontanamento di lingue laviche sino ad oltre 10 km. dalla bocca (nonostante il piuttosto rilevante percorso in Valle del Bove a lieve pendenza), e d'altro canto anche con alta probabilità del comportamento anomalo dell'attuale eruzione nei riguardi sia della durata che dell'assenza dei fenomeni parossistici terminali precedenti o contemporanei all'attività effusiva laterale: in quanto entrambe le singolarità dovrebbero essere messe tra l'altro in relazione, a parità di altre condizioni, con l'attitudine ad una sempre più rapida suturazione delle fenditure al crescere del coefficiente di viscosità delle masse in esse iniettate.

In conclusione può pertanto dirsi che il risultato ottenuto permette non solo di ritenere che la temperatura d'irrigidimento per le lave esaminate fosse, in base alle considerazioni effettuate, di circa 635° , ma anche di dare con relativa facilità l'interpretazione di caratteristiche eruttive non giustificabili almeno con uguale facilità in base ad altri metodi ed ancora di mettere in evidenza lievi variazioni nelle condizioni fisiche delle masse fluenti, la cui conoscenza acquista notevole interesse per l'interpretazione presente o futura di fenomeni anche se all'osservazione soggettiva del momento possano sfuggire eventuali lievi differenze di comportamenti.

DETERMINAZIONE DEGLI ELEMENTI NEUTRI NEL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI
DI UN GRUPPO FINITO

Nota del socio corrispondente **Guido Zappa**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1951)

Sunto. — Si risolve il problema, proposto da G. BIRKHOFF, di determinare tutti gli elementi neutri nel reticolo formato da tutti i sottogruppi di un gruppo finito.

Un elemento a di un reticolo L si dice *neutro* se, comunque si scelgono due elementi x e y di L , il reticolo generato da a, x ed y è distributivo ¹⁾.

Il BIRKHOFF ²⁾ tra i 111 problemi insoluti da lui presentati nel suo volume citato, ha posto quello di determinare gli elementi neutri nel reticolo costituito da tutti i sottogruppi di un gruppo finito.

In questa nota dò la soluzione di questo problema.

1. Il BIRKHOFF ³⁾ ha dimostrato che condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento a di un reticolo L sia neutro e che (i) la corrispondenza che associa a ciascun elemento x di L l'elemento $x \wedge a$, e quella che associa ad x l'elemento $x \vee a$ siano ambedue endomorfismi di L , e che, (ii) se x ed y sono due elementi di L tali che $x \wedge a = y \wedge a$, $x \vee a = y \vee a$, si abbia $x = y$.

Sia ora G un gruppo finito, ed $L(G)$ il reticolo formato da tutti i sottogruppi di G . La corrispondenza che associa a ciascun sottogruppo X di G il sottogruppo $X \wedge A$ di un sottogruppo fisso A di G è stata da me chiamata *emitropismo inferiore tipico* ⁴⁾, mentre ho detto *emitropismo inferiore* tra due gruppi G e G' una corrispondenza tra i sottogruppi di G e quelli di G'

¹⁾ Per la definizione di reticolo (in inglese « lattice ») distributivo, ed altre definizioni e teoremi sui reticoli, occorrenti in questo lavoro, vedi G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, Revised Edition, Published by the American Mathemat. Society, 1948 (citato in seguito con [B]).

²⁾ [B], pag. 98, problema 85.

³⁾ [B], pag. 28, lemma 1 e pag. 29, esercizio 1 (a). La dimostrazione della proposizione data in detto esercizio non figura, ma si deduce facilmente dalle considerazioni svolte nella dimostrazione del lemma.

⁴⁾ *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale*, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 78, 1949, pp. 182-192 (citato in seguito con [Z 1]).

tale che (i) ad ogni sottogruppo di G corrisponde un sottogruppo, ed uno solo, di G' , (ii) ogni sottogruppo di G' provenga da almeno un sottogruppo di G , e (iii) se ad A e B di G corrispondono, in G' , A' e B' , ad $A \wedge B$ corrisponde $A' \wedge B'$. In modo analogo ho definito l'*emitropismo superiore* (sostituendo, nella definizione di emitropismo inferiore, il segno \vee al segno \wedge), mentre ho chiamato *emitropismo superiore tipico* l'emitropismo superiore subordinato tra i sottogruppi di un gruppo G e quelli di un suo fattoriale G/N dall'ordinario omomorfismo tra gli elementi di G e quelli di G/N .

Orbene, si nota subito che l'emitropismo inferiore tipico tra il gruppo finito G e il suo sottogruppo A è un emitropismo superiore se e solo se esso dà luogo ad un endomorfismo di $L(G)$. E poichè, come abbiamo visto, affinchè un sottogruppo A sia un elemento neutro di $L(G)$ occorre che la corrispondenza (emitropismo inferiore tipico) che associa a ciascun sottogruppo X il sottogruppo $X \wedge A$ sia un endomorfismo di $L(G)$, si ha che gli elementi neutri di $L(G)$ sono da cercarsi tra i sottogruppi A di G tali che l'emitropismo inferiore tipico tra G ed A sia un emitropismo superiore.

Orbene, sia G un gruppo finito ed A un suo sottogruppo. Se g è l'ordine di G , ed n quello di A , i fattori primi di g possono suddividersi in tre categorie: a) fattori primi che compaiono in g ed in n alla stessa potenza; b) fattori primi che compaiono sia in g che in n , ma in n compaiono con esponente minore che in g ; c) fattori primi che compaiono in g , ma non in n . Qualcuna di queste categorie può anche essere vuota. Detto l il prodotto dei fattori primi (ciascuno con la sua molteplicità), della categoria a); h il prodotto di quelli della categoria b); m il prodotto di quelli della categoria c), e chiamato k il prodotto dei fattori primi della categoria b) ciascuno contato con la molteplicità con cui compare in n , si ha che $g = m h l$, $n = k l$. Si ha che, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'emitropismo inferiore tipico tra G ed A sia un emitropismo superiore, è che A sia normale in G , e si abbia $G = MHL$, $A = KL$, ove M , H , L , K hanno rispettivamente ordini m , h , l , k , M ed L sono normali in G , ogni elemento di M è permutabile con ogni elemento di A , H è ciclico o prodotto diretto di un gruppo ciclico d'ordine dispari per un gruppo generalizzato dei quaternioni, K è ciclico e, se H non è ciclico, k non è divisibile per 4, K è contenuto in H , e infine, se S è un sottogruppo di Sylow di H , ogni elemento o sottogruppo di L permutabile con ogni elemento di $S \wedge K$ è permutabile con ogni elemento di S ¹⁾.

2. Ne segue che se A è un elemento neutro di $L(G)$, dovendo l'emitropismo inferiore tipico tra G ed A essere un emitropismo superiore, A deve essere normale in G , in base al teorema ora citato. D'altra parte, se

¹⁾ G. ZAPPA, *Sulla condizione perchè un emitropismo inferiore tipico tra due gruppi sia un omotopismo*, Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. 80, 1950-51, pp 80-101.

A , è neutro in $L(G)$, la corrispondenza che associa a ciascun sottogruppo X di G il sottogruppo $X \vee A$ è un endomorfismo di G , onde, se X e Y sono due sottogruppi di G , si ha $(X \wedge Y) \vee A = (X \vee A) \wedge (Y \vee A)$. Essendo A normale in G , deve allora aversi

$$(1) \quad \frac{(X \wedge Y) \vee A}{A} = \frac{(X \vee A) \wedge (Y \vee A)}{A} = \frac{X \vee A}{A} \wedge \frac{Y \vee A}{A}$$

come si vede osservando che $X \vee A$ e $Y \vee A$ sono formati da laterali di A e che se un laterale di A è in $X \vee A$ e in $Y \vee A$ esso è in $(X \vee A) \wedge (Y \vee A)$, e viceversa.

Si ottiene quindi, in base alla (1), che l'emitropismo superiore tipico tra G e G/A , se A è neutro in $L(G)$, deve essere un emitropismo inferiore. Di conseguenza ¹⁾, esistono un sottogruppo \bar{L} di G d'ordine l , ed un sottogruppo T di G d'ordine mh , tali che $G = T \times \bar{L}$. Allora \bar{L} è l'unico sottogruppo di G d'ordine l , onde coincide con L , e si ha $G = T \times L$. Inoltre ogni elemento di G non contenuto in T ha ordine non primo con l , e pertanto MH , avendo ordine primo con L , è in T , e coincide addirittura con esso, avendo lo stesso ordine. Di conseguenza avremo $G = MH \times L$. Possiamo quindi concludere, in base ai risultati di questo numero, e del numero precedente, che:

Se G è un gruppo finito, ed A è un suo sottogruppo che costituisce un elemento neutro di $L(G)$, detto g l'ordine di G , n quello di A , l il prodotto di tutti i fattori primi (distinti o no) di g , che compaiono in g ed n alla stessa potenza, h il prodotto dei fattori primi (distinti o no) di g , che compaiono anche in n , ma a potenza minore che in g , chiamato m il prodotto di tutti i fattori primi (distinti o no) di g che son primi con n , e detto k il m. c. d. tra n ed h , si ha $G = MH \times L$ ed $A = K \times L$, ove M , H , L , K hanno ordini m , h , l , k rispettivamente, M è permutabile elemento per elemento con A , H è ciclico o prodotto diretto di un gruppo ciclico d'ordine dispari per un gruppo generalizzato dei quaternioni. K è ciclico e, se H non è ciclico, si ha k non divisibile per 4.

3. Mostriamo ora che la precedente condizione necessaria affinchè A sia un elemento neutro di $L(G)$ è anche sufficiente. Sia pertanto A un sottogruppo del gruppo finito G , che soddisfi alle condizioni del teorema del n. prec. Si noti anzitutto che A è normale in G . Infatti, L è normale in G , perchè $G = MH \times L$, e K è normale in G , perchè è normale in H , e ogni suo elemento è permutabile con ogni elemento di M e di L .

Consideriamo l'emitropismo superiore tipico tra G e G/A , e facciamo vedere che esso è un emitropismo inferiore. Basta osservare che son soddisfatte le condizioni di cui nel teorema del lavoro citato ¹⁾.

¹⁾ [Z 1].

Orbene, si ha che $a)$ è $G = MH \times L$, ove l'ordine l di L eguaglia il massimo divisore di g , che sia primo con l'indice di A ; $b)$ si ha $(MH) \setminus A = K$, e K è ciclico; $c)$ K appartiene al centro di MH , perchè, intanto, ogni elemento di K è permutabile con ogni elemento di M , e inoltre K è nel centro di H , come è evidente se H è ciclico, e come si vede nel caso in cui H è prodotto diretto di un gruppo ciclico d'ordine dispari per un gruppo generalizzato dei quaternioni notando che ogni elemento d'ordine dispari di H è in esso normale, che ogni elemento d'ordine 2 di un gruppo generalizzato dei quaternioni appartiene al centro di esso, e quindi ogni elemento d'ordine 2 di H è in esso normale, e che infine ogni elemento di K il cui ordine è potenza di 2 ha ordine 2, ed è pertanto normale in H ; $d)$ ogni sottogruppo di Sylow di MH avente elementi non identici a comune con K deve avere per ordine un divisore di h , e quindi è coniugato ad un sottogruppo di Sylow di H , e di conseguenza è ciclico o gruppo generalizzato dei quaternioni, perchè tale è ogni sottogruppo di Sylow di H . Essendo soddisfatte le condizioni $a), b), c), d)$, l'emitropismo superiore tipico tra G e G/A è un emitropismo inferiore.

Ne segue che, se X e Y sono due sottogruppi di G , vale la (1) del n. 2, onde è $(X \wedge Y) \vee A = (X \vee A) \wedge (Y \vee A)$; essendo poi anche, $(X \vee Y) \vee A = (X \vee A) \vee (Y \vee A)$, si ha che la corrispondenza che associa ad ogni sottogruppo X di G il sottogruppo $X \vee A$ è un endomorfismo di $L(G)$.

Facciamo ora vedere che l'emitropismo inferiore tipico tra G ed A è un emitropismo superiore. Basta far vedere che son verificate le condizioni riportate alla fine del n. 1.

Si nota subito che sono verificate tutte le condizioni, ad eccezione eventualmente dell'ultima, cioè del fatto che, se S è un sottogruppo di Sylow di H , ogni elemento o sottogruppo di L permutabile con ogni elemento di $S \wedge K$ è permutabile con ogni elemento di S . Ma anche quest'ultima condizione è verificata, perchè essendo $G = MH \times L$, ogni elemento di L è permutabile con ogni elemento di H , e quindi di S , in ogni caso, e così ogni sottogruppo di L . Pertanto l'emitropismo inferiore tipico tra G ed A è un emitropismo superiore, onde la corrispondenza che associa ad ogni sottogruppo X di G il sottogruppo $X \wedge A$ è un endomorfismo di $L(G)$.

4. L'elemento A di $L(G)$ soddisfa quindi alla condizione (i) di BIRKHOFF citata all'inizio del n. 1. Facciamo ora vedere che è soddisfatta anche la (ii), che cioè se X ed Y sono sottogruppi di G tali che $X \wedge A = Y \wedge A$, $X \vee A = Y \vee A$, si ha $X = Y$.

Sia $Z = X \vee Y$. Sarà, evidentemente tenuto conto della (i), $Z \wedge A = (X \vee Y) \wedge A = (X \wedge A) \vee (Y \wedge A) = (X \wedge A) \vee (X \wedge A) = X \wedge A$, e analogamente $Z \vee A = X \vee A$. Una volta provato che è $Z = X$, essendo $Z = X \vee Y \geq Y$, si ha $X \geq Y$, da cui, per ragioni di simmetria, si ha $Y \geq X$, quindi $X = Y$. Basta quindi provare che è $Z = X$.

Sia $Z \vee A$ che $X \vee A$ constano di un certo numero di laterali di A ; ed avendosi $Z \vee A = X \vee A$. $Z \vee A$ e $X \vee A$ constano dei medesimi laterali di A . Essendo A normale in G , ogni elemento di $Z \vee A$ (di $X \vee A$) è della forma za (o xa) con z in Z (x in X) ed a in A , e quindi ogni laterale di A contenuto in $Z \vee A$ (in $X \vee A$) è della forma zA (o xA) con z in Z (o x in X); vale a dire un laterale di A è in $Z \vee A$ (in $X \vee A$) se e solo se esso contiene un elemento almeno in Z (in X). E poichè, come abbiamo visto, $Z \vee A$ e $X \vee A$ constano dei medesimi laterali di A , si ha che, se un laterale di A ha un elemento in Z , esso ha anche un elemento in X , ossia il numero dei laterali di A che hanno un elemento in Z eguaglia quello dei laterali che hanno un elemento in X . Sia p tale numero.

Se z (o rispettivamente x) è un elemento di un laterale zA (xA) di A e appartenente a Z (a X), ogni altro elemento di zA (di xA) situato in Z (in X) è della forma za (xa), con a anch'esso in Z (in X); e viceversa ogni elemento di detta forma è in Z (in X). Vale a dire, se z è in Z (x è in X), i singoli elementi di Z (di X) situati in zA (in xA) si ottengono moltiplicando z (o x) per i singoli elementi di $Z \wedge A$ (di $X \wedge A$).

Ne segue che il numero degli elementi di Z situati in un laterale di A eguaglia quello degli elementi di X situati nel medesimo laterale, perchè ambedue eguali all'ordine di $Z \wedge A = X \wedge A$. Detto v l'ordine di $X \wedge A = Z \wedge A$, si ha quindi che tanto l'ordine di Z che quello di X eguagliano pv . Pertanto, essendo $Z \geq X$, si ha $Z = X$.

Si ha quindi che anche la condizione (ii) è soddisfatta, e pertanto A è neutro. Possiamo quindi concludere:

La condizione necessaria perchè A sia neutro, data alla fine del n. 2, è anche sufficiente.

5. Chiamiamo ora *sottogruppo di HALL* di un gruppo finito G un sottogruppo il cui ordine sia primo col suo indice in G ¹⁾.

Notiamo che se L è un sottogruppo di HALL normale di G , un eventuale complemento di L in G ²⁾ è anch'esso un sottogruppo di HALL e ha ordine eguale all'indice di L in G .

¹⁾ Siamo portati a dare tale definizione perchè Ph. HALL dimostrò che ogni gruppo risolubile ammette sottogruppi di qualunque ordine n che divide l'ordine g del gruppo e sia primo con $\frac{g}{n}$ (*A note on soluble groups*, Journal of London Math. Soc., 8, pp. 98-105).

²⁾ Se L è un reticolo dotato di un elemento I che contenga ogni altro elemento di L , e di un elemento 0 contenuto in ogni elemento di L , dicesi *complemento* di un elemento x di L un elemento y tale che $x \vee y = I$, $x \wedge y = 0$. [B], pag. 23). Se L è il reticolo formato da tutti i sottogruppi di un gruppo G , si ha che I coincide con G , e 0 è il sottogruppo identico.

Quando, nel teorema alla fine del n. 2, si pone $K \equiv 1$, A si riduce ad L , cioè ad un sottogruppo di HALL normale, e il suo complemento MH è anche esso un sottogruppo di HALL normale. Viceversa, un sottogruppo di HALL normale A del gruppo finito G , che ammetta un complemento normale T , è un elemento neutro di $L(G)$, in base all'ultimo enunciato, perchè soddisfa alla condizione di cui al teorema del n. 2, qualora vi si ponga $H \equiv K \equiv 1$.

Si dice *centro* di un reticolo L il sottoreticolo formato da quegli elementi di L che hanno una componente eguale ad I e l'altra eguale a O in una rappresentazione di L come prodotto cardinale di due fattori ¹⁾.

È noto ²⁾ che un elemento è nel centro di un reticolo se e solo se esso è neutro e ammette un complemento. Pertanto, i sottogruppi del gruppo G che costituiscono il centro del reticolo $L(G)$ formato da tutti i sottogruppi di G sono tutti e soli quei sottogruppi che sono neutri in $L(G)$ e ammettono complemento.

Orbene, come abbiamo visto, i sottogruppi di HALL normali di G a complemento normale sono neutri in $L(G)$, e sono, naturalmente, complementati, e pertanto appartengono al centro di $L(G)$. Mostriamo ora che essi sono i soli sottogruppi di G che appartengono al centro di $L(G)$.

Basta a tal fine far vedere che ogni altro sottogruppo di G che sia neutro in $L(G)$ non ammette complemento.

Sia pertanto A un sottogruppo di G che sia neutro in $L(G)$, e quindi soddisfa alle condizioni del teorema del n. 2; e supponiamo che esso non sia un sottogruppo di HALL normale a complemento normale. Conservando le notazioni del n. 2, si avrà $A \equiv K \times L$ con $K \neq 1$, e quindi sarà anche $H \neq 1$. Sia p un divisore di h ; mostriamo che ogni elemento di G d'ordine p è in A . Infatti ogni elemento di G d'ordine p è in un sottogruppo di SYLOW relativo a p di G , il quale a sua volta è coniugato ad un sottogruppo di SYLOW relativo a p di H . Pertanto, se ξ è un elemento d'ordine p di G , un coniugato $\bar{\xi}$ di ξ è in H . Ma H , essendo ciclico o prodotto diretto di un gruppo ciclico d'ordine dispari per un gruppo generalizzato dei quaternioni, ha un solo sottogruppo d'ordine p , il quale deve essere in K , perchè, essendo h divisibile per p , K deve avere un sottogruppo d'ordine p . Pertanto $\bar{\xi}$ è in K , cioè in A , e poichè A è normale in G , anche ξ , quale coniugato di $\bar{\xi}$, è in A , c. d. d.

Dal fatto che ogni elemento di G d'ordine p è in A segue subito che, se è $K \neq 1$, A non è complementato. Infatti, essendo A normale, un even-

¹⁾ Per il significato dei simboli I e O vedi nota ²⁾ a pag. preced. Dicesi *prodotto cardinale* di due reticoli L ed M l'insieme delle coppie (x, y) con x in L e y in M , con le relazioni $(x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge x', y \wedge y')$ e $(x, y) \vee (x', y') = (x \vee x', y \vee y')$. Cfr. [B], p. 7. Per la definizione di *centro* di un reticolo vedi [B], pag. 27.

²⁾ [B], p. 28, corollario.

tuale complemento B di A , deve avere ordine eguale all'indice A in G , poichè l'indice di $A \wedge B = 1$ in B , cioè l'ordine di B , eguaglia l'indice di A in $AB = A \vee B = G$. E poichè l'indice di A in G è divisibile per p , l'ordine di B deve essere divisibile per p , e pertanto B deve contenere elementi d'ordine p , i quali, per l'ultima osservazione, devono essere in A ; e ciò è assurdo, perchè si deve avere $A \wedge B = 1$, essendo B complemento di A . Si può concludere che:

Il centro del reticolo $L(G)$ di tutti i sottogruppi del gruppo finito G è costituito da tutti i sottogruppi di HALL normali di G a complemento normale.

CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO PER GLI ANNI 1951-1952

L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1951-1952.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all'autore della migliore memoria sul tema: « *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 31 ottobre 1952.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell'autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell'autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto lo *accessit* saranno aperte nell'adunanza plenaria del gennaio 1953 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell'archivio dell'Accademia banditrice.

Napoli, 3 marzo 1951.

Il Presidente
FRANCESCO GIORDANI

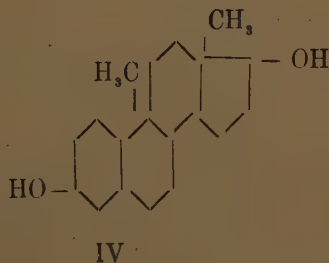
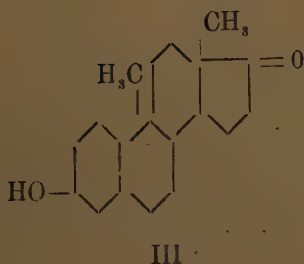
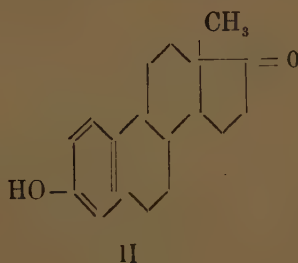
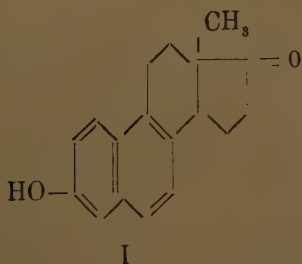
SINTESI NEL CAMPO DELLE SOSTANZE STEROIDI
 Nota I^a. 1-CHETO-13-METIL-PERIDROFENANTRENE

Nota del socio corrisp. Luigi Panizzi e del dott. Mario Piattelli

(Adunanza del dì 13 gennaio 1951)

Sunto. — Viene brevemente descritto l'ottenimento, attraverso numerosi composti intermedi, dell'1-cheto-13-metilperidrofenantrene.

Nel campo dei numerosi ormoni steroidi oggi noti, le sintesi totali finora realizzate sono state solamente quelle degli estrogeni equilenina ¹⁾ (I) ed estrone ²⁾ (II). Le difficoltà proprie a tale campo di lavoro, reso faticoso dal rapido minimizzarsi dei rendimenti complessivi attraverso l'elevato



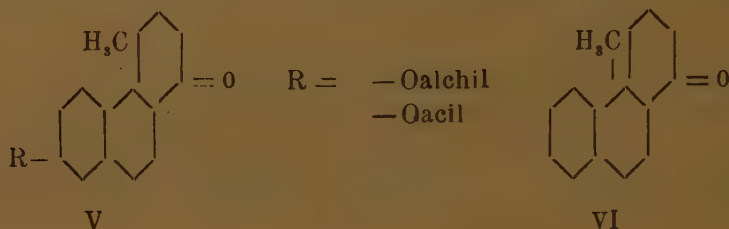
numero dei necessari passaggi, diventano particolarmente sensibili quando si consideri la sintesi totale di ormoni androgeni, come, ad es., l'androsterone (III) e l'androstandiolo (IV), dove si ha a che fare con la difficile introduzione di un secondo metile angolare in C₁₀ e con il gran numero dei

¹⁾ BACHMANN, COLE e WILDS, J. Am. Chem. Soc., 61, 974 (1939); 62, 824 (1940). — JOHNSON, PETERSEN e GUTSCHE, J. Am. Chem. Soc., 67, (1945); 69, 2942 (1947).

²⁾ ANNER e MIESCHER, Experientia, 4, 25 (1948).

prevedibili stereoisomeri; questi infatti, che per (I) e per (II) si limitano rispettivamente a 4 e a 16, diventano, nel caso di (III) e (IV), rispettivamente 128 e 256. A dette difficoltà è da attribuire la sinora mancata realizzazione di una sintesi totale di ormoni androgeni naturali o di qualche loro stereoisomero.

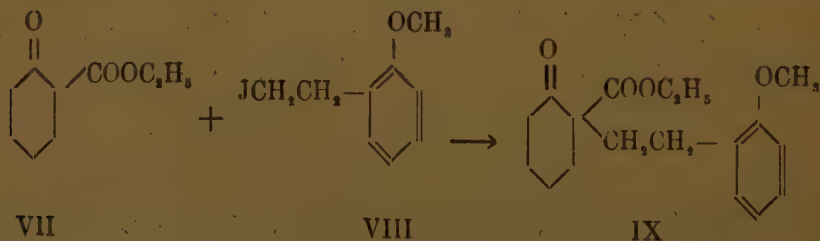
La disponibilità di una sostanza quale la (V) permetterebbe sicuramente di ottenere sferoidi di tipo androgene come (III) e (IV), dato che, per la successiva introduzione in essa dell'anello ciclopentanico e del nuovo metile angolare si possono esattamente applicare i metodi già sperimentati con successo nelle sintesi di (I) e (II). Essendo nostra intenzione di portare un



contribuito in tale campo di ricerche, ci siamo quindi posto il problema della preparazione di (V) ¹⁾ ed abbiamo pensato ad un procedimento che ci è parso opportuno collaudare, applicandolo prima alla sintesi di un modello strettamente affine a (V), l'1-cheto-13-metilperidrofenantrene (VI), che differisce dal primo per l'assenza di R.

Sulla sintesi di questo modello, realizzata con successo, viene brevemente riferito in questa prima Nota, mentre è in corso l'ottenimento, per la stessa via, di (V).

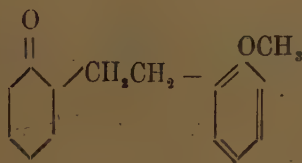
Per azione dell'ester cicloesanoncarbonico (sale sodico) (VII) sul joduro dell'alcool o anisiletilico (VIII) in ambiente alcoolico anidro, si ottiene l'ester



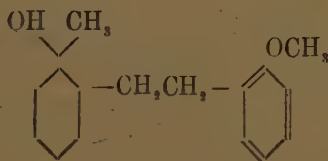
¹⁾ Una tale sostanza venne recentemente descritta da CORNFORTH e ROBINSON in J. Chem. Soc., 1949, 1855 (Nota XLVIII sulla sintesi di sostanze relative agli steroli), attraverso una via diversa però da quella scelta da noi. Nel loro brillante lavoro, gli AA. sono riusciti inoltre ad eseguire la separazione di alcuni stereoisomeri e ad ottenere un chetone contenente un altro metile in posizione 2 e del tutto identico al prodotto di ossidazione di uno steroide naturale.

-(o.anisiletil) cicloesanoncarbonico (IX), p. eb. 223-225° sotto 12 mm., p. f. 44-46° e il cui 2,4-dinitrofenilidrazone si presenta in aghi gialli p. f. 145-146°.

Per ebollizione prolungata con una mescolanza di acido solforico diluito ed acido acetico, l'ester (IX) si saponifica decarbossilandosi e trasformandosi nel chetone (X), liquido incolore p. eb. 207-209 a 13 mm. e il cui corrispondente 2,4-dinitrofenilidrazone si presenta in aghi giallo bruni, p. f. 134-135°.

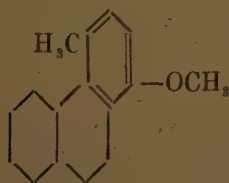


X

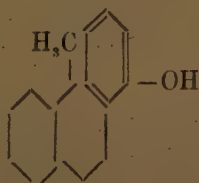


XI

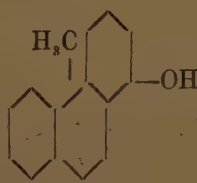
L'azione su (X) del CH_3MgI conduce all'alcool terziario (XI), olio denso che, a sua volta, per riscaldamento con eccesso di P_2O_5 , fornisce il metossi-13-metilottaidrofenantrene (XII); questo si presenta come un olio incolore, p. eb. 149-150° a 3-4 mm., dotato di fluorescenza violacea ed è stabile di fronte al permanganato acetico a freddo.



XII



XIII



XIV

L'ebollizione con una mescolanza di acido bromidrico ed acetico trasforma (XII) nell'1-ossi-13-metilottaidrofenantrene (XIII), che si presenta in piccoli prismi incolori (da etere di petrolio) p. f. 86-88°, p. eb. 173-174° sotto 3 mm. Esso è solubile in alcali caustico 2N e precipita per diluizione; la sua soluzione alcoolica, per aggiunta di FeCl_3 , si colora in verdognolo.

L'idrogenazione catalitica di (XIII), condotta in ambiente alcoolico e in presenza di Ni-Raney, a 115 atm. e a 150°, conduce all'alcool 1-ossi-13-metilperidrofenantrene (XIV), olio incolore molto denso.

A riprova della struttura assegnata a (XIV), questo venne assoggettato all'azione aromatizzante del Se metallico, per 20 ore a 320-350°, ottenendosi così il fenantrene (XV) p. f. 92-94°, purificato sia attraverso il suo picrato p. f. 139-142° sia per ripetute sublimazioni. Tanto (XV) che il suo picrato, non mostrano depressione, nella prova del p. di fusione in miscela.



L'ossidazione cromica (CrO_3 in acido acetico) di (XIV) ha permesso lo ottenimento del chetone (VI) che non venne isolato come tale dalla miscela di reazione (data la piccola quantità), ma sotto forma dei suoi derivati semicarbazone, piccoli cristalli incolori p. f. $232-234^\circ$ e 2,4-dinitrofenilidrazone, cristalli rossi (da acido acetico), p. f. $197-199^\circ$.

Napoli, Istituto di Chimica organica dell' Università, 13 gennaio 1951.

SULLA DETERMINAZIONE DELLE LINEE DI INFLUENZA NEI SISTEMI AD ALTO GRADO DI IPERSTATICITÀ

Nota del dott. Aldo Raithe, presentata dal socio corr. A. Galli

(Adunanza del dì 13 gennaio 1951)

Sunto. — Rilevate le difficoltà che presenta la determinazione delle linee di influenza per i sistemi ad alto grado di iperstaticità si espone un metodo oltremodo semplice e sintetico e si riporta un'applicazione numerica del procedimento.

Premessa. — La costruzione effettiva di una linea di influenza si riconduce in generale, per il teorema di LAND, alla determinazione della deformata della struttura corrispondente ad una particolare distorsione. Si espone in quanto segue un procedimento che permette la determinazione diretta di detta deformata tramite gli usuali metodi di calcolo dei sistemi iperstatici secondo un procedimento unitario applicabile a qualsiasi tipo di struttura facendo riferimento in particolare al caso di sistemi costituiti da travi ad asse rettilineo di sezione comunque variabile e nelle più generali ipotesi di vincolo.

1. Esposizione del metodo.

Si consideri l'asta generica ik di un sistema elastico, telaio, che caratterizzeremo mediante:

α_i = rotazione della sezione i della trave semplice per un momento unitario agente sulla sezione i ;

α_k = rotazione della sezione k della trave semplice per un momento unitario agente sulla sezione k ;

β = rotazione della sezione $i(k)$ della trave semplice per un momento unitario agente sulla sezione $k(i)$;

e si indichino con x ed x' rispettivamente le distanze dagli estremi i e k della generica sezione s .

Per ottenere la linea di influenza in s di una qualsiasi caratteristica di sollecitazione o di deformazione (si ricorre nell'ultimo caso al teorema di BETTI) si eseguano le seguenti operazioni:

1.) Interruzione della continuità tra la trave $i k$ e la rimanente struttura mediante l'introduzione di due cerniere alle estremità i e k .

2.) Costruzione della cercata linea di influenza y_0 per la trave semplice ottenuta mediante l'operazione 1).

3.) Determinazione delle rotazioni di estremità φ_i e φ_k derivanti dalla operazione 2) ed applicazione agli estremi della trave ed ai complessi elastici di vincolo dei momenti M_i e M_k atti a ripristinare la continuità della struttura.

4.) Sovrapposizione delle deformate derivanti dalle operazioni 2) e 3): si perviene così alla linea di influenza effettiva.

La praticità del metodo deriva dalla scelta di un sistema principale (la trave semplice per cui sono note le linee di influenza e le relative rotazioni di estremità) e dalla semplicità del sistema di equazioni a cui si perviene:

$$(a) \quad \begin{aligned} M_i \alpha_i + M_k \beta &= -C_i M_i - \varphi_i \\ M_i \beta + M_k \alpha_k &= -C_k M_k - \varphi_k \end{aligned}$$

dove si sono indicate con C_i e C_k le deformabilità, rotazioni provocate da un momento unitario, dei complessi elastici di vincolo in i e k .

La soluzione del sistema (a) è immediatamente perseguibile con i metodi di calcolo dei telai: ci avvarremo in seguito del metodo di CROSS.

2. La pratica del procedimento.

Ci riferiremo alle linee di influenza del momento flettente e dello sforzo di taglio restando valido lo stesso procedimento per le linee di influenza delle altre caratteristiche salvo le specificazioni del caso per i valori delle rotazioni di estremità della trave semplice.

Come detto in precedenza si applica il metodo di CROSS che si suppone senz'altro noto. A tal fine si considerano inizialmente i nodi impediti di

rotare, il che equivale a porre nelle (a):

$$C_i = C_k = 0,$$

e si determinano i valori dei momenti d'incastro perfetto:

$$(b) \quad \bar{M}_i = \frac{\beta \varphi_k - \alpha_k \varphi_i}{\alpha_i \alpha_k - \beta^2}$$

$$(c) \quad \bar{M}_k = \frac{\beta \varphi_i - \alpha_i \varphi_k}{\alpha_i \alpha_k - \beta^2}$$

Ove si tratti di trave appoggiata in k e ovviamente:

$$(d) \quad \bar{M}_i = - \frac{\varphi_i}{\alpha_i}$$

Nel caso particolare di travi a sezione costante per cui si ponga.

$$K = \frac{EI}{l^3}$$

le (b), (c), (d), diventano:

I° Linea M .

$$(b') \quad \bar{M}_i = 2K(x - 2x')$$

$$(c') \quad \bar{M}_k = 2K(x' - 2x)$$

$$(d') \quad \bar{M}_i = -3Kx'$$

II° Linea T .

$$(b''), (c'') \quad \bar{M}_i = 6K = -\bar{M}_k$$

$$(d'') \quad \bar{M}_i = 3K.$$

Noti i valori dei momenti d'incastro perfetto si esegue l'equilibramento dei nodi col metodo Cross pervenendo ai valori effettivi dei momenti in tutta la struttura.

Le ordinate della linea di influenza per la campata ik sono dati da:

$$(e) \quad y = y_o + M_i y_{xi} + M_k y_{xk}$$

dove:

y_{xi} = abbassamento della sezione corrente per $M = 1$ in i .

y_{xk} = abbassamento della sezione corrente per $M = 1$ in k .

sono di seguito tabellati per la trave a sezione costante a meno della costante $\frac{1}{100 K}$:

x/l	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
y_{xi}	0.00	2.85	4.80	5.95	6.40	6.25	5.60	4.65	3.20	1.65	0.00
y_{xb}	0.00	1.65	3.20	4.65	5.60	6.25	6.40	5.95	4.80	2.85	0.00

4. Esempio numerico.

Con riferimento al telaio riportato nella seguente figura eseguiamo la determinazione della linea di influenza del momento flettente per la sezione $x = 0.3 \text{ l}$, $x' = 0.7 \text{ l}$ della campata B-C.

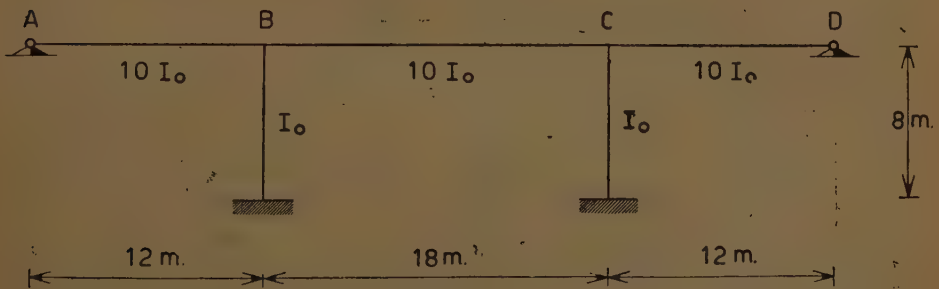


Fig. 1.

I momenti d'incastro perfetto risultano (b'), (c'):

$$\bar{M}_{bc} = -39.60 K_{bc} \quad \bar{M}_{cb} = +3.60 K_{bc}$$

e dall'applicazione del metodo di Cross si ottengono i seguenti valori dei momenti:

$$\begin{aligned} M_{ba} &= -19.482 K_{bc} & M_{bc} &= -23.386 K_{bc} \\ M_{cb} &= -2.899 K_{bc} & M_{cd} &= -2.415 K_{bc} \end{aligned}$$

Le ordinate della linea di influenza sono allora:

$$\text{Campata A-B} \quad y = -19.482 K_{bc} \frac{1}{100 K_{ab}} y_{xb}$$

Campata B-C $y = y_c - 23.386 \frac{y_{ab}}{100} - 2.890 \frac{y_{xc}}{100}$

Campata C-D $y = -2.415 K_{bc} \frac{1}{100 K_{cd}} y_{xc}$

ed i loro valori numerici sono calcolati nella tabella seguente per un intervallo $\Delta x = 0,10 L$.

$\frac{x}{l}$	A - B $y = M_{ab} y_{xb}$	B - C $y_c + M_{bc} y_{ab} + M_{cb} y_{xc} = y$				C - D $y = M_{cd} y_{xc}$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.1428	+1.2600	-0.6665	-0.0468	+0.5157	-0.9306
0.2	-0.2770	+2.5200	-1.1225	-0.0928	+1.3017	-0.0515
0.3	-0.4026	+3.7800	-1.3915	-0.1348	+2.2537	-0.0638
0.4	-0.4848	+3.2400	-1.3967	-0.1323	+1.5810	-0.0687
0.5	-0.5111	+2.7000	-1.4616	-0.1812	+1.0572	-0.0671
0.6	-0.5541	+2.1600	-1.3096	-0.1855	+0.6649	-0.0601
0.7	-0.5151	+1.6200	-1.0874	-0.1725	+0.3601	-0.0499
0.8	-0.4156	+1.0800	-0.7483	-0.1391	+0.1926	-0.0343
0.9	-0.2467	+0.5400	-0.3859	-0.0826	+0.0715	-0.0177
1.0	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni dell' Università, novembre 1949.

SULLA CRANIOLOGIA DEI SANNITI MODERNI

Nota del dott. Antonio De Rosa, presentata dal socio U. Pierantoni

(Adunanza del dì 3 febbraio 1951)

Sunto. — L'A ha esaminato 100 crani di moderni Sanniti, i cui caratteri morfologici e metrici, messi a raffronto con quelli dei crani degli antichi Sanniti, hanno permesso interessanti rilievi intorno ad un nucleo etnico dell'Italia meridionale.

Nell'estate del 1946 furono effettuati degli scavi nella necropoli pre-romana di Alfedena e tutto l'interessante materiale craniologico fu da noi studiato e furono individuati dei gruppi distinti, che costituivano la popolazione della città antica di Alfedena e verosimilmente anche della regione circostante abitata da popolazioni del gruppo sannitico.

Dalla vasta collezione del museo di Antropologia della Università di Napoli abbiamo scelto una serie di 100 crani, di cui 69 maschili e 31 femminili, moderni, provenienti da una zona piuttosto ristretta intorno alla località di Alfedena, utilizzando il materiale proveniente da pochi comuni delle province di Benevento, Campobasso ed Aquila.

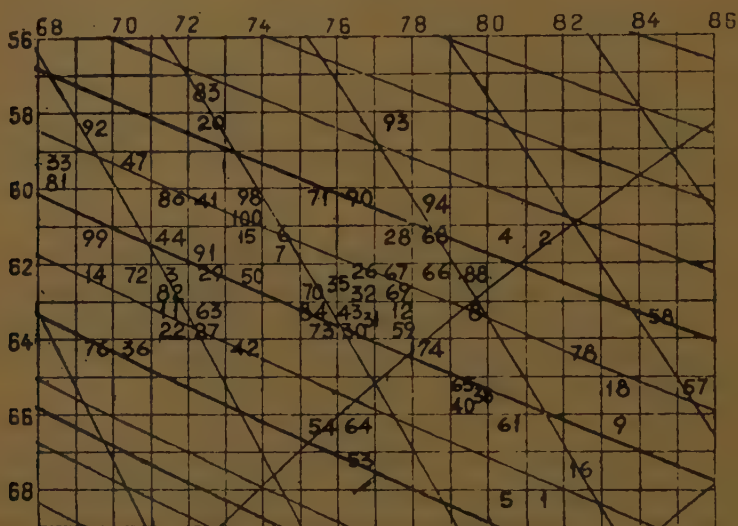
Scopo principale del lavoro era la osservazione del comportamento del gruppo dopo circa 25 secoli e, successivamente, inquadrare i risultati dei nostri studi nel campo di quelle più vaste ricerche che da anni andiamo conducendo per una migliore conoscenza antropologica delle popolazioni dell'Italia meridionale.

La metodologia e la tecnica del lavoro sono ovviamente le stesse che abbiamo seguito per i resti fossili della necropoli Aufdenate, e ciò, non solamente per poter effettuare degli opportuni raffronti, ma, anche, per poter seguire le eventuali variazioni o concordanze.

Dei 100 crani, come abbiamo già detto, 69 sono maschili e 31 sono femminili. La determinazione del sesso è quasi sicura, dati i vari elementi metrici e morfologici dei quali ci siamo giovati.

Tutti i crani sono privi di mandibola, e pertanto sono state rilevate le misure del cranio e quelle superiori della faccia. Per quanto riguarda la faccia dobbiamo osservare che la larghezza facciale non fu presa in base alla distanza bizigomatica, la quale, come abbiamo già detto altre volte, risente troppo della variazione della larghezza cranica massima, per cui essa è più forte nei platibrachicefali, che negli ipsidolicocefali dello stesso tipo razziale. Fu presa, invece di quella, la misura della distanza proposta dal VIRCHOW, fra i due punti zigomascellari inferiori.

Per stabilire il comportamento della serie rispetto all'architettura del cranio cerebrale fu eseguita la proiezione dei casi con il grafico proposto e realizzato dal SERA ¹⁾, in base alla combinazione dell'indice cefalico orizzontale individuale con l'indice vertico-longitudinale secondo la soprauricolare, stabilendo in tal modo la posizione di ogni cranio rispetto alle tre linee di altezza proposte per tale sistema.



Proiezione dei crani maschili dei Sanniti moderni secondo l'indice cef. orizzontale e l'indice di altezza vertico-auricolare longitudinale.

Analogamente a quanto si verificò per la serie di Alfedena, la maggioranza dei crani è collocata in una zona fra la ortocefalia e la platicefalia; esiste un buon numero di casi di decisa platicefalia ed un numero di casi di ortocefalia. Per quanto riguarda l'indice cefalico orizzontale, pur essendo i valori medi delle due serie quasi uguali (74 e 75), si nota una maggiore omogeneità nel gruppo moderno ed un deciso slittamento verso la brachicefalia.

Allo scopo di rappresentare la grandezza della faccia, abbiamo usato il prodotto dell'altezza per la larghezza come sopra specificata. Avendo utilizzato tali distanze, abbiamo ottenuto una dimensione proporzionale alla dimensione vera della faccia. Ma per eliminare il fattore « grandezza assoluta » è stato calcolato per ogni cranio il modulo dello SCHMIDT ed a questo è stato riferito il « rettangolo facciale », cioè il prodotto dell'altezza per la larghezza facciale.

È interessante a questo punto notare, che alcuni valori estremi, che potettero rilevarsi nei tipi di Alfedena, che noi consideriamo immigrati, dopo tanti secoli sono andati modificandosi; tuttavia le caratteristiche dei

⁴⁾ G. L. SERA, *Un foglio di proiezioni per rapporti* ecc. Monit. Zool. It., 1916.

gruppi sono, relativamente a tutta la serie, rimaste invariate, specialmente per la parte che si riferisce ai rapporti cranio-facciali.

Associando la grandezza della faccia, relativa al cranio, al valore reale dell'altezza del cranio, quale risultava dai summenzionati fogli di proiezione, ed al valore dell'indice cefalico orizzontale, i crani sanniti sono stati distinti in cinque gruppi indipendenti, caratterizzati come segue:

Gruppo A — Tipo platicefalico metrioprosopo;

Gruppo B — Tipo platicefalico macroprosopo;

Gruppo C — Tipo orto-subplati-dolicocefalico metrioprosopo;

Gruppo D — Tipo orto-subplati-dolicocefalico macroprosopo;

Gruppo E — Tipo orto-dolicocefalico metrioprosopo.

Per la composizione di questi gruppi ci siamo serviti dei crani maschili, non solamente perchè essi indicano meglio le caratteristiche dei tipi ma anche perchè, nelle serie femminili, i rapporti craniofacciali non potrebbero essere esaminati con la stessa metodologia, dati i valori facciali, naturalmente più bassi nei crani femminili. Tuttavia nelle tabelle finali abbiamo riportato tutti i valori del cranio e della faccia della serie femminile. Giova a questo punto osservare che l'esame del cranio cerebrale, con i fogli di proiezione del SERA in base alla combinazione dell'indice cefalico orizzontale individuale con l'indice vertico-longitudinale secondo la soprauricolare e la basilo-bregmatica, rivela che i crani della serie femminile sono situati, nella loro quasi totalità, nei due sistemi, nella fascia della platicefalia. Per quanto riguarda l'indice orizzontale gli stessi crani sono esattamente ripartiti delle due zone della dolicocrania e della mesocrania.

Desideriamo brevemente analizzare i criteri che ci hanno guidati nello esame dei valori facciali. Innanzi tutto osserviamo le medie di gruppo per il modulo dello SCHMIDT: $A = 152$; $B = 151$; $C = 153$; $D = 149$; $E = 152$. I cinque gruppi variano quindi dal valore 149 al valore 153. Variazione, come si vede, piccola, ma è interessante notare che i gruppi B e D sono quelli che hanno i moduli più piccoli, rispettivamente 151 e 149. È, pertanto, maggiormente notevole in essi il forte sviluppo della faccia; poichè il rapporto tra il modulo ed il rettangolo facciale nei gruppi B e D è di valore più alto, rispettivamente 48 e 49; essendo il valore più basso nei gruppi A , C , E : rispettivamente 43, 42, 42.

Effettivamente i gruppi B e D presentano, sia in senso assoluto, sia in senso relativo, il più forte sviluppo della faccia come valore tipico.

Pur essendo il criterio fondato sull'esame dei rapporti facciali, come abbiamo osservato, pienamente giustificato per la distinzione dei gruppi tuttavia, analogamente a quanto abbiamo praticato nella serie antica, abbiamo voluto analizzare se altri elementi confermassero tale distinzione.

Un efficace elemento analitico si è rivelato il rapporto fra il diametro frontale minimo e la larghezza facciale secondo VIRCHOW: *Indice fronto-faciale trasversale*. Anche per questo i gruppi B e D si distinguono da

Crani dei gruppi con caratteri mediterranei.

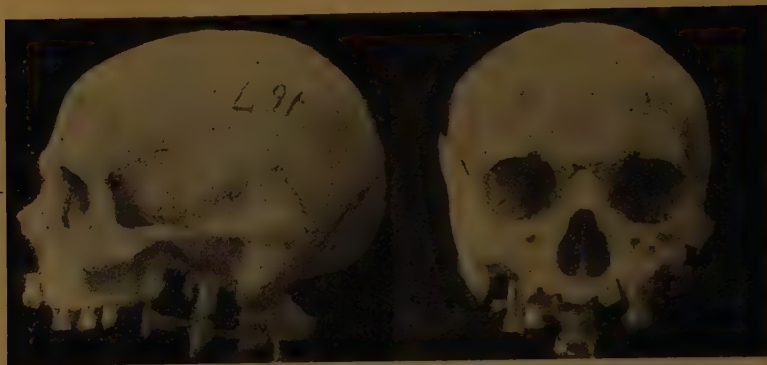


Fig. 1 e 2 — Cranio N. 67 del Gruppo A nelle norme laterale sinistra e frontale.

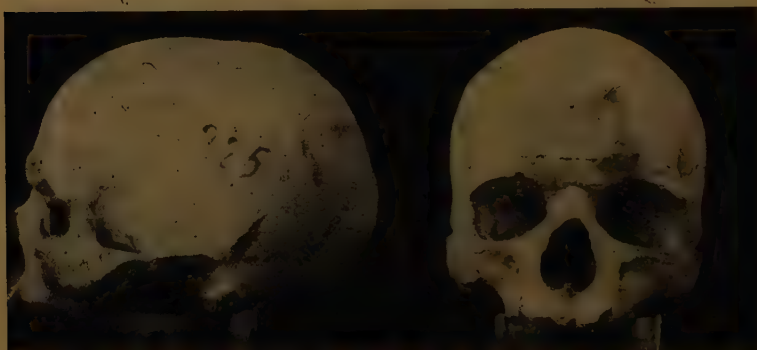


Fig. 3 e 4. — Cranio N. 86 del Gruppo C nelle due norme lat. sin. e frontale.

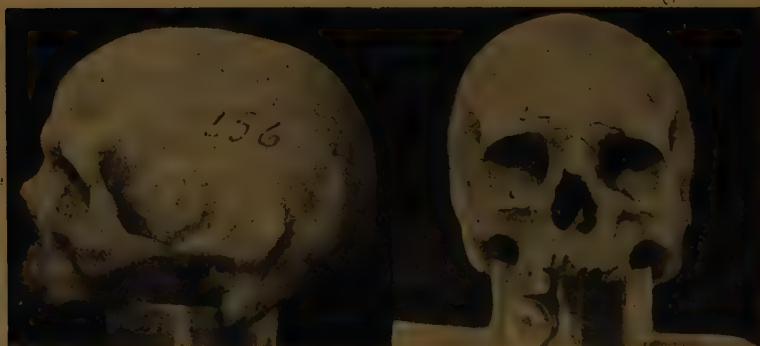


Fig. 5 e 6. — Cranio N. 54 del Gruppo E nelle due norme.

Crani dei gruppi con caratteri derivati dai nordici.

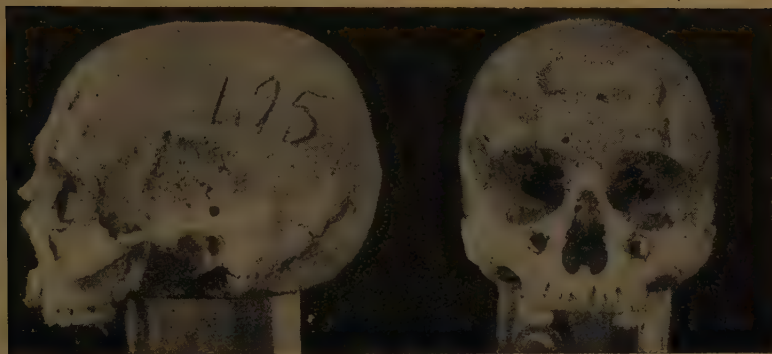


Fig. 7 e 8 — Cranio N. 69 del Gruppo B nelle due norme laterale sin. e frontale.

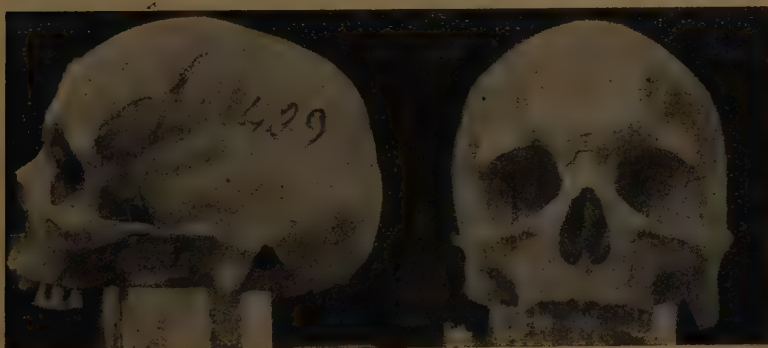


Fig. 9 e 10 — Cranio N. 43 del Gruppo D nelle due norme laterale sin. e frontale.

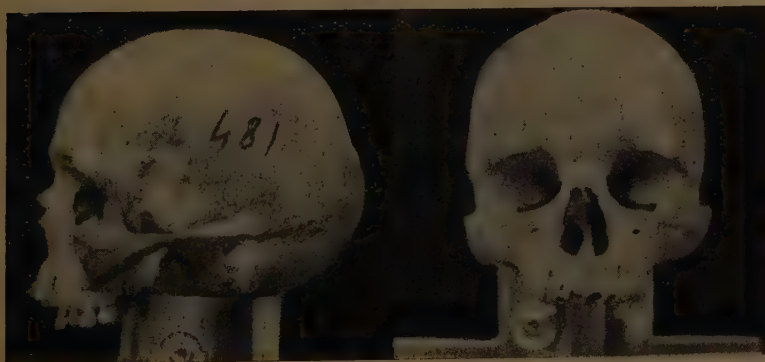


Fig. 11 e 12 — Cranio N. 64 del Gruppo D nelle norme laterale sin. e frontale.

tutti gli altri per il valore più basso (90) in confronto di 95 per il gruppo *A*, 93 per il gruppo *C*, 95 per il gruppo *E*; questo valore più basso è da attribuire, nei gruppi *B* e *D*, sia al basso valore del diametro frontale minimo sia al forte valore della larghezza facciale.

Un altro rapporto da noi usato è quello fra l'altezza nasale e l'altezza facciale (*indice di altezza naso-facciale verticale*). Anche questo ci dà delle differenze non solo tra i due gruppi platicefalici, ma anche fra i due gruppi macroprosopi e gli altri della serie. Infatti i gruppi *A*, *C* ed *E* ci danno rispettivamente i valori di 79, 78 e 77, mentre i gruppi *B* e *D* ci danno i valori di 76 e 75. Ciò è tanto più notevole in quanto alla scarsa differenza fra i valori dell'altezza nasale 51 per i gruppi *B* e *D*, 50 per tutti gli altri corrisponde una più sensibile differenza fra i valori dell'altezza facciale che è di 68 e 69 per i gruppi *B* e *D*, e 65, 61 e 63 per gli altri gruppi.

Tralasciamo l'analisi degli indici di altezza e di quello orizzontale del cranio, in quanto questi elementi non introducono nulla di nuovo, essendo la nostra distinzione fondamentale dei tipi basata in parte su di essi.

L'indice fronto-parietale del gruppo *A* è di 71, del gruppo *B* 70, del gruppo *C* 70, del gruppo *D* 70, del gruppo *E* 74.

Se passiamo ad esaminare l'indice facciale superiore ci troviamo dinanzi al fatto che i gruppi *B* e *D* posseggono i valori più alti, rispettivamente 64 e 65, mentre il valore di esso è di 63 per il gruppo *A*, di 61 per il gruppo *C* e di 60 per il gruppo *E*.

Ciò è dovuto sia alla maggiore larghezza facciale dei gruppi *B* e *D* 107, 108, sia al più forte valore dell'altezza assoluta, rispettivamente 68 e 69, che supera quella degli altri gruppi. I valori corrispondenti per l'altezza e la larghezza facciale sono: gruppo *A* 65 e 103, gruppo *C* 65 e 104, gruppo *E* 63 e 105.

Per l'indice facciale e le distanze che concorrono a determinarlo è utile qui riportare i valori della serie preistorica nelle medie di ogni gruppo, dando, subito dopo l'indice, anche le distanze facciali.

Tali valori sono: Gruppo *A* 63-67-105; gruppo *C* 66-70-105; gruppo *E* 63-67-107; gruppo *B* 67-75-111; tralasciamo quelli del gruppo *D* perchè composto di soli due casi, i cui valori superano anche quelli del gruppo *B*.

Le differenze fra i gruppi della serie moderna sono meno sensibili di quelle della serie preistorica; ciò è dovuto al naturale evolversi dei tipi allogeni, alla loro assimilazione, sia pure lenta, alla popolazione autoctona; infine, alla inevitabile presenza nei gruppi di alcuni elementi a caratteri misti.

L'indice nasale è di valore lievemente più basso nei due gruppi *B* e *D* (48), mentre per i gruppi *A*, *C* ed *E* abbiamo rispettivamente 49, 49, 50.

I valori dell'indice orbitale non danno alcun elemento differenziale utile alla distinzione dei gruppi. Riportiamo le cifre relative: *A*=92, *B*=85, *C*=82, *D*=83, *E*=80.

L'analisi fisionomica, in generale, concorda pienamente con i risultati dell'analisi metrica, fin qui esposta, anche secondo le indicazioni del SERA sulla fisionomia facciale etnica.

Per dimostrare più compiutamente quanto abbiamo finora detto, riproduciamo le fotografie di sei crani, e cioè del N. 67 esemplare del gruppo *A*, del N. 86 esemplare del gruppo *C*, del N. 54 esemplare del gruppo *E*, del N. 69 esemplare del gruppo *B*, e dei numeri 43 e 64 esemplari del gruppo *D*.

Si notano le differenze tra i crani dei gruppi *A*, *C* ed *E* e quelli dei gruppi *B* e *D*. In *norma frontale* i primi rivelano la faccia relativamente bassa e stretta, fosse canine ben sviluppate, processo alveolare relativamente corto; i crani degli altri due gruppi invece presentano caratteri quasi opposti e, più di ogni altra caratteristica, colpisce l'altezza del processo alveolare. In *norma laterale* il contrasto è ancora più manifesto; tuttavia la fronte piuttosto sfuggente e le arcate sopraorbitarie marcate, naso sporgente, margine esterno dell'apertura orbitale arretrato, sono i caratteri più evidenti dei crani dei gruppi *B* e *D* in opposizione a quelli dei crani degli altri tre gruppi. Un esame più approfondito poi rivela le differenze fra i caratteri dei gruppi *A* e *C*, *C* ed *E* e le differenze fra i caratteri dei crani del gruppo *B* e quelli del gruppo *D*.

Nelle fotografie dei crani della serie preistorica, infine, sono facilmente rilevabili le somiglianze fra i crani dei gruppi rappresentati e quelli corrispondenti della serie moderna, tenendo beninteso sempre presente la naturale evoluzione verificatasi dopo tanti secoli.

Possediamo numerosi elementi probativi per la caratterizzazione dei diversi gruppi, ampiamente confermati nella loro consistenza e nella loro indipendenza reciproca, ed anche nella loro corrispondenza ai gruppi della serie antica. I cinque gruppi da noi individuati sono distinti nel modo seguente:

A. — Minore grandezza facciale relativa. Valore massimo dell'indice fronto-facciale trasversale, dovuto principalmente al minor valore della larghezza facciale. Massimo valore dell'indice naso-facciale verticale per la piccola altezza facciale; indice fronto-parietale più alto che in *B*, *C*, *D*; indice facciale minore che in *B* e *D* per il minor valore dell'altezza e della larghezza facciale. Appartengono a questo gruppo i crani ai nn. 4, 6, 28, 58, 67, 68, 71, 78, 83, 88, 90, 93, 94.

B. — Forte grandezza facciale relativa; valore più basso dell'indice fronto-facciale trasversale, dovuto essenzialmente al più forte valore del diametro facciale. Minor valore dell'indice naso-facciale verticale per il più forte valore dell'altezza facciale; indice fronto-parietale più basso che in *A*, indice facciale superiore alto, malgrado il più forte valore della larghezza facciale. Appartengono a questo gruppo i crani ai nn. 7, 8, 20, 41, 47, 57, 66, 69, 92, 98, 100.

C. — Piccola grandezza facciale relativa. Valore sensibile dell'indice

fronto-facciale trasversale per ragioni analoghe che in *A*, valore sensibile dell'indice naso-facciale verticale per ragioni come in *A*; basso valore dell'indice facciale per ragioni analoghe che in *A*. Appartengono a questo gruppo i crani ai nn. 2, 3, 9, 12, 15, 16, 26, 29, 31, 35, 38, 59, 63, 65, 70, 72, 81, 86, 91, 99.

D. — Massima grandezza facciale relativa. Valore basso dell'indice fronto-facciale trasversale, dovuto esclusivamente al massimo valore del diametro facciale; valore minimo dell'indice naso-facciale verticale dovuto al massimo valore dell'altezza facciale; indice fronto-parietale come in *B*; indice facciale superiore massimo, malgrado il valore massimo del diametro facciale. Appartengono a questo gruppo i crani ai nn. 14, 18, 27, 29, 30, 32, 33, 40, 43, 44, 50, 53, 61, 64, 73, 74, 82, 84.

E. — Piccola grandezza facciale relativa. Valore massimo dell'indice fronto-facciale trasversale per ragioni come in *A*; valore intermedio dell'indice naso-facciale verticale; indice fronto-parietale massimo per il massimo valore del diametro frontale minimo; il più piccolo indice facciale dovuto esclusivamente al valore minimo dell'altezza facciale. Appartengono a questo gruppo i crani ai nn. 1, 5, 11, 22, 36, 42, 54, 76.

L'esame dei tipi facciali, in relazione ai tipi fisionomici stabiliti dal SERA, ci indirizza verso l'attribuzione dei tipi dei gruppi *A*, *C* ed *E* al quarto tipo fisionomico di detto autore, mentre i tipi dei gruppi *B* e *D* possono attribuirsi al suo secondo tipo fisionomico. Secondo la distribuzione geografica dei tipi fisionomici data dal SERA possiamo attribuire ai gruppi *A*, *C*, *E*, caratteri del tipo mediterraneo; ai gruppi *B* e *D* caratteri derivati dai tipi nordici.

Per quanto riguarda la successione cronologica dei diversi tipi che hanno abitato quella regione del Sannio che abbiamo all'inizio descritta, fondandoci sulle nostre precedenti ricerche e su quelle attuali, possiamo dedurre che i platicefali mediterranei (gruppo *A*), pur essendo stati i più antichi abitatori della regione, hanno trasmesso con molta persistenza alcuni dei loro caratteri, e specialmente quelli riferentisi all'architettura del cranio cerebrale. I mediterranei del gruppo *C*, probabilmente succeduti ai primi, ma sicuramente di avvento più recente, formano il nucleo essenziale della intera popolazione, sia per i loro caratteri decisamente rappresentativi; sia per la loro consistenza numerica. Si ebbe poi una immigrazione piuttosto massiva dei tipi nordici dei gruppi *B* e *D*, caratterizzati dall'aspetto di grande forza e rozzezza, che spesso arriva ad una certa brutalità di aspetto. A nostro avviso i due gruppi nordici sono di avvento contemporaneo, e ciò sia per la presenza nella serie preistorica di alcuni tipi del gruppo *D*, sia per i rilievi di alcuni caratteri nel gruppo moderno, decisamente più marcati che nello stesso gruppo *B*. La opportuna messa in evidenza di questo gruppo ci fornisce la indicazione, di notevole interesse, che, nei tipi nordici, accanto ad individui platicefalici, esistessero individui con il cranio cerebrale

relativamente più alto. Gli ultimi furono i mediterranei del gruppo *E*. Questa conclusione è fondata non solamente sull'aspetto di dispersione dei casi di questo gruppo nel grafico da noi dato, in concordanza con la serie antica, ma anche per caratteri di maggiore finezza ed evoluzione degli individui del gruppo *C*; questi dati, uniti alla scarsa consistenza numerica di essi (circa l'11% della serie maschile), indicano un avvento più recente e sporadico degli individui appartenenti al gruppo *E*.

Vogliamo infine riportare i valori degli indici dei cinque gruppi.

Gruppo A. — Indice cefalico orizzontale 77; I. fronto-parietale 71; I. fronto-facciale 95; I. naso-facciale 85; I. facciale sup. 63; I. nasale 49; I. orbitario 92.

Gruppo B. — I. cefalico orizz. 75; I. fronto-parietale 70; I. fronto-facciale 90; I. naso-facciale 76; I. facciale sup. 64; I. nasale 48; I. orbitario 85.

Gruppo C. — I. cefalico orizz. 74; I. fronto-parietale 70; I. fronto-facciale 93; I. naso facciale 78; I. facciale sup. 61; I. nasale 49; I. orbitario 82.

Gruppo D. — I. cefalico orizz. 74; I. fronto-parietale 70; I. fronto-facciale 90; I. naso-facciale 75; I. facciale sup. 65; I. nasale 48; I. orbitario 83.

Gruppo E. — I. cefalico orizz. 74; I. fronto-parietale 74; I. fronto-facciale 95; I. naso facciale 77; I. facciale sup. 60; I. nasale 50; I. orbitario 80.

Per la capacità cranica abbiamo: Gruppo *A* cc. 1380, Gruppo *B* cc. 1365, Gruppo *C* cc. 1424, Gruppo *D* cc. 1418, Gruppo *E* cc. 1437.

La capacità cranica è stata misurata direttamente con il miglio. La media generale della capacità cranica è per la serie maschile di cc. 1415 per la serie femminile di cc. 1260.

La media generale dell'indice cefalico orizzontale è per la serie maschile 75, per la serie femminile 74.

Abbiamo riportato nella nota presente, in due tabelle distinte, per i crani maschili e femminili, tutti i valori rilevati, gli indici e i rapporti calcolati, segnando in calce a ogni tabella le medie di tutti i dati con i relativi valori massimi e minimi.

CRANI MASCHILI DEI SANNITI MODERNI

N. d'ordine	Capacità cranica	Lunghezza	Larghezza	Altezza	Altezza sopraciliolare	Diametro front. min.	Altezza facciale	Larghezza facciale	Altezza nasale	Larghezza nasale	Altezza orbitaria	Larghezza orbitaria	Modulo di Schüide	Retangolo facciale	Rapp. M. Schüide	Indice fronto-pariet.	Indice fronto-facciale	Indice naso-facc. vert.	Indice cefalico-vert.	Indice vertico-longitud.	Indice auriculo-vertic.	Indice laec. superiore	Indice nasale	Indice orbitario
1	1320	174	141	128	118	111	59	98	44	21	34	41	148	5782	39	79	113	75	81	74	68	53	48	83
2	1420	195	136	137	118	95	60	103	50	22	32	40	156	6180	40	70	92	83	70	70	61	63	44	80
3	1490	190	135	141	117	96	59	103	47	22	30	38	155	6077	39	71	93	80	71	74	62	61	47	79
4	1600	187	149	134	114	101	69	105	56	26	36	43	157	7245	46	68	96	81	80	72	61	68	46	84
5	1480	182	145	127	123	104	58	102	47	23	36	42	151	5916	39	72	102	81	80	70	68	56	49	86
6	1400	185	136	130	112	100	64	104	52	25	37	41	150	6656	44	74	96	81	74	70	61	64	48	90
7	1170	179	132	126	110	99	69	104	53	26	35	41	146	7176	49	75	95	77	74	70	61	65	49	85
8	1360	176	140	129	111	97	72	107	54	23	34	39	148	7704	52	70	91	75	79	73	63	74	43	87
9	1600	180	150	139	118	106	59	108	51	25	32	41	153	6372	40	71	98	86	83	77	66	56	49	78
11	1460	189	134	140	119	95	49	109	40	26	27	38	154	5341	35	71	87	82	71	74	63	52	65	71
12	1220	172	133	128	108	87	65	95	48	20	30	38	144	6175	43	65	92	74	77	74	63	75	42	87
14	1430	190	132	130	117	90	66	110	53	26	33	40	147	7260	48	68	82	80	69	68	62	60	49	79
15	1450	187	137	137	114	99	60	104	46	22	32	40	154	6240	41	72	95	77	73	73	61	61	48	80
16	1410	175	141	140	117	99	64	106	49	24	34	39	153	6784	44	69	93	77	82	80	67	60	49	87
18	1440	181	150	132	118	96	66	110	46	25	31	38	154	7230	47	64	87	70	83	73	65	60	54	82
20	1560	194	140	138	113	91	68	106	52	22	34	40	157	7208	47	65	86	76	72	71	58	64	42	85
22	1520	190	134	142	119	97	65	106	49	27	33	40	155	6890	44	72	92	75	71	75	63	61	55	82
26	1400	182	138	128	112	97	63	106	49	22	33	40	149	6678	45	70	92	78	76	70	62	59	45	82
27	1380	187	135	134	118	105	69	114	52	25	34	40	152	7866	52	78	92	74	72	72	63	61	48	85
28	1400	180	136	138	110	95	60	100	47	24	32	39	151	6000	40	70	95	78	76	77	61	60	51	82
29	1360	183	132	130	113	100	63	112	49	23	35	41	152	7056	46	76	89	78	72	71	62	56	47	85
30	1270	178	135	137	112	92	67	106	50	26	32	38	150	7102	47	68	87	75	76	77	63	63	52	84
31	1560	186	142	139	118	99	65	107	45	24	32	38	156	6955	45	70	93	69	76	75	63	61	53	84

32	1500	186	141	135	116	96	73	102	52	25	32	38	154	7446	48	68	94	71	76	73	62	72	48	84
33	1620	203	139	139	120	102	72	105	54	23	35	41	160	7332	48	73	96	75	68	68	59	71	43	85
35	1440	186	141	131	115	95	57	103	47	22	30	39	153	5871	38	67	92	82	76	70	62	55	47	77
36	1540	187	130	144	119	91	65	107	49	25	32	40	154	6955	45	70	85	75	70	77	64	61	51	80
38	1320	179	142	139	117	95	60	101	47	24	33	40	159	6060	38	67	94	78	79	78	65	63	51	82
40	1440	181	143	145	117	105	70	106	51	24	35	42	156	7420	48	72	99	73	79	80	65	67	47	83
41	1330	185	133	136	111	95	66	108	50	23	35	40	151	7128	47	71	88	76	72	74	60	61	46	87
42	1340	178	130	139	114	95	65	104	52	22	31	41	149	6760	45	73	91	80	73	78	64	68	42	76
43	1380	182	138	125	114	98	69	108	53	24	33	40	148	7452	50	71	91	77	76	69	63	70	45	82
44	1390	190	134	139	116	93	70	105	47	27	35	39	154	7350	48	69	89	67	71	73	61	67	57	90
47	1240	187	131	124	110	96	68	101	51	27	33	39	147	6868	47	73	95	75	70	65	59	67	53	85
50	1430	183	133	131	113	95	70	109	53	28	34	39	149	7630	51	71	87	76	73	72	62	64	53	87
53	1320	176	134	136	118	94	78	102	58	26	35	40	149	7956	54	70	92	74	76	77	67	76	45	87
54	1330	175	132	131	116	99	67	103	45	24	33	39	146	6901	47	75	96	67	75	75	66	65	53	85
57	1380	179	152	132	117	101	67	110	49	27	34	40	154	7370	48	66	92	73	85	74	65	61	55	85
58	1280	172	145	128	108	87	62	99	49	22	31	37	148	6138	41	60	88	79	84	74	63	63	45	84
59	1320	175	134	135	110	90	64	100	49	25	34	41	148	6400	43	67	90	77	77	77	63	64	51	83
61	1530	179	143	139	119	93	68	105	51	24	30	41	154	7140	47	65	89	75	80	78	66	65	47	73
63	1300	180	130	131	113	92	60	99	47	23	32	37	147	5940	41	71	92	78	72	73	63	61	49	86
64	1420	181	138	143	119	100	72	109	51	26	31	40	154	7848	51	72	92	71	76	79	66	66	51	77
65	1440	175	139	130	114	95	64	100	51	22	35	39	148	6400	43	68	95	80	79	74	65	64	43	90
66	1460	189	147	138	118	98	68	114	51	26	36	41	158	7752	49	67	86	75	78	73	62	60	51	88
67	1340	190	146	131	117	95	66	110	51	28	33	39	156	6660	43	65	86	77	77	69	62	60	55	85
68	1520	191	149	137	117	100	68	105	55	28	36	40	159	7140	45	67	95	81	78	72	61	65	51	90
69	1380	174	134	133	108	91	67	104	54	22	36	40	147	6968	47	68	87	81	77	76	62	64	41	90
70	1360	177	133	129	109	96	57	97	47	24	30	37	146	5529	38	72	99	82	75	73	62	59	51	71
71	1380	183	138	130	109	97	67	102	53	23	33	38	150	6334	46	71	95	79	75	71	60	66	43	87
72	1440	193	136	141	119	95	65	104	50	28	33	39	157	6760	43	70	91	77	70	73	62	62	56	85
73	1230	178	133	131	112	100	63	118	51	27	32	42	147	7434	51	75	85	81	75	74	63	53	53	76
74	1440	180	141	136	116	99	72	101	49	20	36	40	152	7272	48	70	98	68	78	76	64	71	41	90
76	1510	192	133	143	122	102	67	106	52	23	30	40	156	7102	45	77	96	78	69	74	64	63	44	75
78	1340	174	142	129	111	97	57	101	42	24	31	39	148	5757	39	68	96	74	82	74	64	56	57	79
81	1480	192	131	134	113	95	62	112	52	26	34	39	152	6944	46	73	85	84	68	70	59	55	50	87

N. d'ordine	Capacità cranica	Larghezza	Larghezza	Altezza	Altezza Sopraorbitale	Diametro front. min.	Altezza facciale	Larghezza facciale	Altezza nasale	Larghezza nasale	Altezza orbitaria	Larghezza orbitaria	Modulo di Schmidt	Retangolo facciale	R. Rett. facc. M. Schmidt	Indice fronto-pariet.	Indice fronto-facciale	Indice naso-facc. vert.	Indice cefalico-orizz.	Indice vertico-longitud.	Indice auriculo-vertic.	Indice facc. sup.	Indice nasale	Indice orbitario
82	1400	190	135	137	117	93	68	108	53	24	35	40	154	7344	48	69	86	78	71	72	62	63	45	87
83	1440	188	135	127	108	97	63	97	50	23	33	40	153	6111	40	72	100	79	72	68	57	65	46	82
84	1460	183	138	131	116	95	68	106	52	24	35	38	151	7208	48	69	90	76	75	72	63	64	46	92
86	1600	200	142	141	120	100	66	112	50	26	31	41	161	7392	46	70	89	76	71	70	60	59	52	76
88	1520	188	148	135	117	103	60	106	52	27	32	45	157	6360	40	70	97	87	79	72	62	57	52	71
90	1750	199	152	133	120	107	67	102	52	23	39	43	161	6834	42	70	104	78	76	67	60	66	44	91
91	1260	180	136	130	111	97	59	97	45	24	32	40	149	5723	38	71	100	76	76	67	62	61	53	80
92	1250	190	131	132	110	93	67	111	51	27	31	41	151	7437	49	71	84	76	69	58	60	53	76	
93	1170	177	136	121	102	102	66	101	49	24	31	41	145	6666	46	75	101	74	77	68	58	65	49	76
94	1280	176	138	130	106	87	67	98	48	25	35	39	148	6566	44	63	89	72	78	74	60	68	52	90
98	1280	186	135	127	111	100	68	106	50	22	34	43	150	7208	48	74	94	74	73	68	60	64	44	79
99	1620	195	134	144	119	99	61	104	50	25	34	43	158	6344	40	74	95	82	69	74	61	59	50	79
100	1610	192	140	140	115	100	67	111	51	29	35	40	157	7437	47	71	90	76	73	73	60	60	57	87
Val. mass	1750	203	152	145	123	111	78	118	58	29	39	45	161	7956	54	77	113	87	85	80	68	76	65	92
Val. medio	1413	184	138	136	114	97	65	105	50	24	33	40	152	6831	45	70	98	77	75	73	62	63	49	83
Val. min.	1170	172	130	121	102	187	49	95	40	20	27	37	144	5341	35	60	82	67	68	66	57	52	41	71

CRANI FEMMINILI DEI SANNITI MODERNI

10	1300	186	135	133	113	90	69	99	50	23	31	40	151	6831	45	67	91	72	73	72	61	77	46	77
13	1240	170	136	128	110	85	64	97	48	21	34	35	145	6208	44	62	88	75	80	75	65	66	44	97
17	1140	170	134	120	102	97	63	94	48	19	36	36	141	5922	42	72	103	75	79	71	60	67	40	100

19	1140	168	128	120	100	90	56	86	47	20	34	37	139	4816	35	70	105	84	76	71	60	62	43	92
21	1200	174	132	121	103	86	57	97	42	24	31	37	142	5529	39	65	89	74	76	70	59	66	57	84
23	1300	182	136	118	105	94	67	97	52	21	34	38	145	6499	45	69	97	78	75	65	58	71	40	89
24	1100	177	126	129	108	96	57	97	42	22	31	37	144	5529	38	76	99	74	71	73	61	59	52	84
25	1280	172	132	129	108	88	61	86	46	20	32	34	144	5246	36	67	102	75	77	75	63	69	43	94
34	1300	180	134	126	108	95	72	91	50	16	38	41	137	6552	48	71	104	69	74	70	60	79	32	93
37	1080	160	122	125	100	89	55	100	43	23	32	37	136	5500	41	73	89	78	76	78	60	55	53	86
39	1360	180	132	134	112	90	60	100	48	24	33	37	139	6000	43	68	90	80	73	74	62	60	50	89
45	1380	188	132	133	113	95	63	98	53	21	32	39	151	6174	41	72	97	84	70	71	60	64	40	82
46	1310	178	134	128	107	100	70	101	52	22	32	38	147	7070	48	75	99	74	75	72	60	69	42	84
48	1260	174	130	125	106	90	66	100	49	25	33	38	143	6000	42	69	90	74	75	72	61	66	51	87
49	1160	182	128	119	103	99	64	104	51	24	31	41	143	6055	47	77	95	80	70	65	57	62	47	76
51	1440	190	140	128	110	94	65	100	48	24	31	41	153	6500	42	67	94	74	74	67	58	65	50	76
52	1260	174	126	123	104	85	51	78	39	18	33	34	141	3978	28	67	109	76	72	71	60	60	46	97
55	1260	172	132	121	107	97	62	93	47	23	29	37	141	5766	41	73	104	76	77	70	62	67	49	78
56	1290	175	135	129	112	91	66	97	49	21	31	37	146	6402	44	67	94	74	77	74	64	68	43	84
60	1220	176	136	126	107	92	62	93	47	21	29	34	146	5766	39	68	99	76	77	72	61	67	45	85
62	1240	167	134	128	104	89	63	88	44	20	31	37	143	5544	39	66	101	70	80	77	62	72	45	84
75	1260	186	127	129	112	93	61	95	46	21	31	37	147	5795	39	73	98	75	68	69	60	64	46	84
77	1120	167	136	124	107	90	80	96	50	23	32	38	142	6720	47	66	94	71	81	74	64	73	46	84
79	1490	183	133	129	115	97	61	100	47	25	33	40	148	6100	41	73	97	77	73	70	63	61	53	82
80	1310	190	133	126	111	90	70	95	55	21	36	39	150	6650	44	68	95	79	70	66	58	74	38	92
85	1460	188	130	132	112	99	68	106	53	25	31	39	153	7208	47	76	93	78	69	70	60	64	47	79
87	1260	171	135	126	110	92	64	92	47	23	34	37	144	5888	41	68	100	73	79	74	64	70	49	92
89	1440	180	143	123	111	94	65	95	46	22	34	38	149	6175	41	66	99	71	79	68	62	68	48	89
95	1220	182	131	125	106	99	67	103	50	23	32	38	146	6901	47	76	96	75	72	69	58	65	46	84
96	1160	182	127	125	104	90	68	99	46	24	33	40	145	6732	46	71	91	68	70	69	57	69	52	82
97	1080	178	129	115	100	89	65	93	48	27	32	37	141	6035	43	69	96	74	72	65	56	70	56	86

Val. max.	1490	190	143	134	115	100	72	106	55	27	38	41	153	7208	48	77	109	84	80	78	65	79	58	100
val. medio	1260	177	132	126	107	92	63	96	48	22	32	38	145	6087	42	70	96	75	74	71	60	67	47	86
Val. min.	1080	160	122	115	100	85	51	78	39	16	21	34	136	3978	28	62	87	68	68	65	56	55	32	76

NOTA BIBLIOGRAFICA

- ANGELUCCI. *Ricerche preistoriche e storiche nell'Italia Meridionale*. Torino, 1876.
- BALZANO. *Dove fu Aufidena?* Castel di Sangro, 1899.
- CORSO R. *Il problema dei Mediterranei*. Riv. di Ethnografia, anno I, n. 2, 1946.
- DE AMICIS V. *Scavi nella Necropoli di Alfedena nell'anno 1901*. A cura dell'A.
- DE NINO A. *Breve relaz. sugli scavi della Necr. di Alfedena*. Napoli, 1882.
- DE NINO A. *Nuovi scavi della Necr. Aufidenatè*. Roma, 1885.
- DE NINO A. *La Necr. di Alfedena*. Notizie degli scavi, 1877, 1882, 1899.
- DE ROSA A. *Sulla craniol. della necr. preistorica di Alfedena*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., serie 4^a, vol. XV, Napoli, 1946-47.
- DE ROSA A. *Caratteri antropologici*. Napoli, Pironti, 1947.
- MARIANI L. *Aufidena*. Mon. dei Lincei, vol. X 1901.
- MARIANI L. *Nuove indagini e scavi della necr. di Alfedena*. Not. d. scavi, 1901.
- SERA G. L., Voce « Italia » in Enciclopedia Italiana.
- SERA G. L., Voce « Fisionomia facciale etnica » in Enciclopedia Italiana.
- SERGI G. *Arii ed Italici. Crani di Alfedena*. Torino, Bocca, 1892.
- SERGI S. *Antropologia dell'Italia*, in « Terra e Nazioni ». Milano, 1936.

Nota del dott. Vincenzo Franciosi, presentata dal socio corr. A. Galli

(Adunanza del dì 3 febbraio 1951)

Sunto. — Con riferimento ai risultati di una nota precedente, in cui, seguendo la teoria del secondo ordine, si è tratta l'espressione della caduta di spinta per accorciamento assiale negli archi sottili, si determina la legge temporale da assegnare alla distorsione alle imposte per ottenere, in regime viscoso, una spinta correttiva costante. Si sviluppa un esempio concreto.

1). *Premesse.* — In una precedente nota [1], anch'essa presentata alla Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, si è trattato della caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati, ricavandola senza trascurare le sollecitazioni supplementari dovute alle deformazioni.

Nella nota presente si esamina la correzione della suddetta caduta di spinta, ottenuta applicando una distorsione alle imposte. Precisamente si ricerca la legge temporale con cui deve incrementarsi la distorsione al fine di compensare la diminuzione nel tempo, per effetto viscoso, della spinta correttiva da essa indotta.

Si estendono perciò in campo viscoso i risultati cui si era pervenuti nella nota [1], giungendo ad un'equazione integrale di FREDHOLM rispetto alla lunghezza, e di VOLTERRA rispetto al tempo, nell'incognita « rotazione ». Sviluppata questa in serie di autofunzioni della omogenea associata, con coefficienti funzioni del tempo, si determinano questi ultimi separatamente, ognuno come soluzione di una equazione differenziale ottenuta, per il principio di identità generalizzato, uguagliando i coefficienti delle autofunzioni dello stesso ordine.

Determinate le rotazioni, si risale al calcolo dell'avvicinamento $\Delta_c(t)$ delle imposte provocato, in presenza del peso proprio, da due forze orizzontali H_c , costanti nel tempo ed agenti in corrispondenza delle imposte stesse. La funzione $\Delta_c(t)$ non è altro che la legge temporale con cui deve variare una distorsione alle imposte per generare una spinta correttiva H_c costante. Il problema è così risolto.

Su un esempio concreto si mostra come la distorsione $\Delta_c(t)$, calcolata trascurando le sollecitazioni dovute alle deformazioni, tenda asintoticamente ad un valore $\Delta_c(\infty)$ quattro volte maggiore dell'iniziale $\Delta_c(0)$; se invece la $\Delta_c(t)$ si ricava tenendo conto delle sollecitazioni supplementari,

il valore $\Delta_c(0)$ ed il rapporto $\frac{\Delta_c(\infty)}{\Delta_c(0)}$ sono rispettivamente del 15% e del 29% maggiori.

2.) *Richiami di risultati già noti.* — Nella nota [1] si è preso in considerazione il problema della determinazione della caduta di spinta per sforzo normale, effettuata tenendo conto delle sollecitazioni prodotte dagli abbassamenti. Le ipotesi a fondamento dello studio sono:

- a) asse geometrico dell'arco parabolico, di luce l e freccia f ;
- b) prodotto $E I_x \cos \vartheta_x = \text{cost} = k$, dove E , I_x e ϑ_x hanno i significati noti;
- c) peso proprio g uniforme;
- d) vincoli alle imposte assimilabili a cerniere.

Sostituite le cerniere di imposta con carrelli, si sono applicati assieme il carico g e le due forze orizzontali $H_g = gl^3/8f$, uguali e contrarie, in corrispondenza dei carrelli, ricavando la quantità Δ_c di cui si avvicinano le imposte per effetto dell'accorciamento dovuto allo sforzo normale. Le due forze H_c orizzontali, uguali e contrarie, che, applicate in corrispondenza dei carrelli, annullano le Δ_c , rappresentano la caduta di spinta dell'arco. Si sa che, trascurando gli abbassamenti, è

$$(1) \quad \Delta_c = \frac{8}{15} \frac{H_c f^3 l}{K};$$

tenendo invece conto di essi, e della presenza di g e di H_g , la (1) si modifica nella

$$(2) \quad \Delta_c = \frac{8}{15} \frac{H_c f^3 l}{K} + 16(H_g - H_c) \frac{fl}{K\pi^3} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{\eta_n}{n^3} + \frac{H_c l}{E A_m}$$

dove

$$(3) \quad \eta_n = \frac{32 H_c f}{n^3 \pi^3 \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} K + H_c - H_g \right)}$$

ed A_m è l'area della sezione media dell'arco.

Limitandosi al solo primo termine η_1 della (3), si ottiene già una buona approssimazione, poichè, ad es. η_1 è pari a $1/300$ di η_3 ; sorge così una equazione di II grado in H_c , a radici sicuramente reali e positive, delle quali va scelta quella che corrisponde al segno + del radicale.

Imprimendo alle due cerniere la distorsione relativa Δ_o , si annulla la caduta di spinta, centrando così la curva funicolare dei carichi; scopo della presente nota è, come già si è detto, la ricerca della legge temporale $\Delta_o = \Delta_o(t)$ con cui deve variare in regime viscoso Δ_o per dar luogo ad una spinta correttiva H_o costante. Trascurando gli abbassamenti è notoriamente

$$(4) \quad \Delta_o(t) = \delta_o H_o [1 + \alpha (1 - e^{-t})]$$

con

$$\delta_o = \frac{8 f^2 l}{15 K}.$$

Per effettuare la stessa ricerca in base alla teoria del II ordine, si seguirà, come nella nota [1], la via delle equazioni integrali secondo FREDHOLM e VOLTERRA, pur additata dal KRALL [2] per lo studio delle aste pressoinflesse in regime viscoso.

3.) *Legge temporale della distorsione alle imposte alla a centrare la funicolare dei carichi in regime viscoso.* — Per risolvere il problema delle aste sottili pressoinflesse in regime viscoso il KRALL generalizza l'equazione delle aste pressoinflesse in regime elastico normale ([1] form 6) giungendo all'altra ([2] pag. 374)

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi(x, t) = & h(x, t) + \sigma \int_0^t N(x, x') a(x') \varphi(x', t) dx' + \int_0^t \Phi(\tau) h(x, \tau) d\tau + \\ & + \sigma \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^t N(x, x') a(x') \varphi(x', \tau) d\tau dx' \end{aligned}$$

dove $\Phi(\tau)$ è la funzione « nucleo ereditario » che si supporrà della forma, tipica per il conglomerato cementizio,

$$(6) \quad \Phi(\tau) = \alpha \beta e^{-\beta \tau}$$

con $\beta = 1$ anno⁻¹, ed α adimensionale uguale a 3.

La (5) è, riguardo alla lunghezza x , una equazione integrale di FREDHOLM di II specie non omogenea, e, riguardo al tempo t , una equazione integrale di VOLTERRA; di quest'ultima però ha solo l'aspetto esteriore, perchè nella espressione del nucleo $\Phi(\tau)$ non compare il termine t che figura come limite superiore dell'integrale. Derivando allora la (5) rispetto a t e imponendo

alla $\varphi(x, t)$ una soluzione del tipo

$$(7) \quad \varphi(x, t) = \sum_{p=1,3}^{\infty} A_p(t) \varphi_p(x)$$

essendo $\varphi_p(x)$ le autofunzioni dell' omogenea associata alla (5), si perviene, per la determinazione di ogni $A_p(t)$, ad una semplice equazione differenziale lineare del primo ordine in $A_p(t)$, di risoluzione concettualmente immediata.

Nel nostro caso è la (11) [1] che si generalizza nella ¹⁾

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi(x, t) = & H_c(t) \int_0^l N(x, x') \frac{dy}{dx'} dx' + [H_g + H_c(t)] \int_0^l N(x, x') \varphi(x', t) dx' + \\ & + \int_0^t H_c(\tau) \Phi(\tau) \int_0^l N(x, x') \frac{dy}{dx'} d\tau dx' + \int_0^t [H_g + H_c(\tau)] \Phi(\tau) \int_0^l N(x, x') \varphi(x', \tau) d\tau dx' \end{aligned}$$

o ancora, ponendo

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_0^l N(x, x') \frac{dy}{dx'} dx' = f(x), \\ \varphi(x, t) = H_c(t) f(x) + [H_g + H_c(t)] \int_0^l N(x, x') \varphi(x', t) dx' + \\ + f(x) \int_0^t H_c(\tau) \Phi(\tau) d\tau + \int_0^t [H_g + H_c(\tau)] \Phi(\tau) \int_0^l N(x, x') \varphi(x', \tau) d\tau dx'. \end{aligned}$$

Per maggiore generalità si è posto $H_c(t)$ variabile nel tempo; sarà poi, per gli sviluppi che interessano, H_c costante.

Si ponga la $\varphi(x, t)$ nella forma (7); le $\varphi_p(x)$ sono fornite da ([1] form. 17)

$$(10) \quad \varphi_p(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{p\pi x}{l}.$$

¹⁾ Il segno + innanzi alla $H_c(t)$ nella parentesi quadra si giustifica perchè nel caso in esame la H_c è diretta verso l'interno.

La $f(x)$ si sviluppa in serie

$$(11) \quad f(x) = \sum_{1,3}^{\infty} f_p \varphi_p(x)$$

dove i coefficienti f_p vanno calcolati alla FOURIER [1]

$$(12) \quad f_p = \int_0^l f(x) \varphi_p(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \cos \frac{p\pi x}{l} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot 16 \frac{f l^2}{K p^2 \pi^2}.$$

Derivando la (9) rispetto al tempo, e adottando con il KRALL la simbologia

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = (\quad \cdot)$$

si ottiene

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{\Phi}(x, t) = & \dot{H}_c(t) f(x) + \dot{H}_a(t) \int_0^l N(x, x') \Phi(x', t) dx' + \\ & + [H_g + H_c(t)] \int_0^l N(x, x') \dot{\Phi}(x', t) dx' + H_c(t) \Phi(t) f(x) + \\ & + (H_g + H_c(t)) \Phi(t) \int_0^l N(x, x') \Phi(x', t) dx'. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (13) i valori (7) e (11), ed uguagliando i coefficienti dei coseni dello stesso ordine ¹⁾ si ottiene

¹⁾ Si ricordi che l'equazione omogenea

$$\Phi(x, t) = \sigma \int_0^l N(x, x') \Phi(x', t) dx'$$

ammette soluzioni solo per gli autovalori

$$\sigma = \sigma_p = \frac{p^2 \pi^2}{l^2} K \quad (p = 1, 2, \dots)$$

cui corrispondono le autofunzioni date dalla (10). È quindi

$$\int_0^l N(x, x') \Phi(x', t) dx' = \frac{\Phi_p(x, t)}{\sigma_p}.$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{A}_p(t) = \dot{H}_o(t) f_p + \dot{H}_o(t) \frac{A_p(t)}{\sigma_p} + [H_g + H_o(t)] \frac{\dot{A}_p(t)}{\sigma_p} + \\ + H_o(t) \Phi(t) f_p + [H_g + H_o(t)] \Phi(t) \frac{A_p(t)}{\sigma_p}. \end{aligned}$$

Se H_o è costante, la (14) diviene

$$(15) \quad A_p(t) = (H_g + H_o) \frac{\dot{A}_p(t)}{\sigma_p} + H_o \Phi(t) f_p + [H_g + H_o] \Phi(t) \frac{A_p(t)}{\sigma_p}$$

e ancora

$$(16) \quad \dot{A}_p(t) \left(1 - \frac{H_g + H_o}{\sigma_p} \right) = A_p(t) \frac{H_g + H_o}{\sigma_p} \Phi(t) + H_o \Phi(t) f_p.$$

Si ha quindi

$$(17) \quad \dot{A}_p(t) = \zeta(t) A_p(t) + \psi(t)$$

con

$$\zeta(t) = \frac{\alpha (H_g + H_o)}{\sigma_p - H_g - H_o} e^{-t} = \gamma_p e^{-t}$$

$$\psi(t) = \frac{\alpha H_o \sigma_p f_p}{\sigma_p - H_g - H_o} e^{-t} = \epsilon_p e^{-t}.$$

La soluzione generale della (17) è ¹⁾

$$(18) \quad A_p(t) = e^{\int_0^t \zeta(\tau) d\tau} \left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau \zeta(\tau) d\tau} \psi(\tau) d\tau + c \right).$$

Poichè

$$\int_0^t \zeta(\tau) d\tau = \gamma_p (1 - e^{-t})$$

¹⁾ V. KARMAN and M. BLOT, *Mathematical methods in engineering*. Mc. Grav Hill Book Company, pag. 124. — R. BURINGTON and C. TORRANCE, *Higher Mathematics*. Mc Grav Hill Book Company, pag. 339.

e

$$\int_0^t e^{-\gamma(1-e^{-\tau})} \psi(\tau) d\tau = \varepsilon \left[\frac{e^{-\gamma_p(1-e^{-t})-t}}{-\gamma_p e^{-t} - 1} + \frac{1}{\gamma_p + 1} \right]$$

si ottiene

$$(19) \quad A_p(t) = e^{\gamma_p(1-e^{-t})} \left[-\frac{\varepsilon_p e^{-\gamma_p(1-e^{-t})-t}}{\gamma_p e^{-t} + 1} + c \right].$$

Per $t=0$ deve risultare ([1], form. 18)

$$A_p(t) = A_p(0) = \frac{f_p H_c}{1 - \frac{H_g + H_c}{\sigma_p}} = \frac{\sigma_p f_p H_c}{\sigma_p - H_g - H_c}$$

e quindi è

$$(20) \quad C = A_p(0) + \frac{\varepsilon_0}{\gamma_p + 1}.$$

È interessante verificare che, per $\alpha = 0$, essendo pure $\gamma_p = \varepsilon_0 = 0$, deriva

$$A_p(t) = A_p(0) = \text{cost.}$$

La (19) può scriversi, ponendo in evidenza $A_p(0)$,

$$(21) \quad \begin{aligned} A_p(t) &= e^{\gamma_p(1-e^{-t})} \left[-\frac{\varepsilon_p e^{-\gamma_p(1-e^{-t})-t}}{\gamma_p e^{-t} + 1} + A_p(0) + \frac{\varepsilon_p}{\gamma_p + 1} \right] = \\ &= A_p(0) \left[-\frac{\alpha e^{-t}}{\gamma_p e^{-t} + 1} + \frac{\gamma_p + 1 + \alpha}{\gamma_p + 1} e^{\gamma_p(1-e^{-t})} \right]; \end{aligned}$$

si ricordi infatti che, per le (17) è

$$\varepsilon_p = \alpha \cdot A_p(0).$$

Ponendo quindi

$$A_p(t) = A_p(0) \cdot F_p(t)$$

si ottiene

$$(22) \quad \varphi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{1,3}^{\infty} A_p(0) F_p(t) \cos \frac{\rho \pi x}{l} = \sum_{1,3}^{\infty} \varphi_p(x, 0) F_p(t) \cos \frac{\rho \pi x}{l}$$

da cui, per integrazione,

$$(23) \quad \eta(x, t) = \sum_{1,3}^{\infty} \eta_p(x, 0) F_p(t) \sin \frac{\rho \pi x}{l}$$

dove ([1], form. 19)

$$(24) \quad \eta_p(x, 0) = \frac{32 H_c f}{\rho^3 \pi^3 \left(\frac{\pi^2 \rho^2}{l^2} K - H_c - H_g \right)}$$

Si passa adesso a calcolare la legge temporale della distorsione $\Delta_c(t)$ atta a fornire una caduta H_c costante.

In regime elastico la Δ_c è fornita dalla equazione (20) della nota [1]

$$(25) \quad \Delta_c = H_c \int_0^l \frac{dD(x')}{dx'} \frac{dy}{dx'} dx' + (H_g + H_c) \int_0^l \frac{dD(x')}{dx'} \frac{d\eta}{dx'} dx'$$

dove y è l'ordinata corrente dell'asse dell'arco, e

$$D(x') = \frac{fl^2}{3K} \left[\frac{x'}{l} - 2 \left(\frac{x'}{l} \right)^3 + \left(\frac{x'}{l} \right)^4 \right]$$

la funzione d'influenza dello spostamento relativo delle imposte provocato da una forza verticale unitaria all'ascissa x' .

Sostituendo nella (25) l'espressione di $y(x)$ e di $\eta(x)$ ed integrando, si ottiene la (2), a meno del segno di H_c in parentesi.

In regime viscoso la (25) si scrive

$$(26) \quad \Delta_c(t) = \frac{8 H_c f^2 l}{15 K} + 16 (H_g + H_c) \frac{fl}{K \pi^3} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{\eta_p(t)}{\rho^3} + \\ + \frac{8 H_c f^2 l}{15 K} \alpha (1 - e^{-t}) + \alpha (H_g + H_c) \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^l \frac{dD(x')}{dx'} \frac{\partial \eta(x', \tau)}{\partial x'} d\tau dx'.$$

L'ultimo termine della (26) è pari a

$$(27) \quad \frac{16 \alpha (H_g + H_o) f l}{K \pi^3} \sum_{1,3} \frac{\eta_p(0)}{\rho^3} \int_0^t F_p(\tau) e^{-\tau} d\tau$$

dove

$$\begin{aligned} \int_0^t F_p(\tau) e^{-\tau} d\tau &= -\alpha \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{\gamma_p e^{-\tau} + 1} d\tau + \frac{\gamma_p + 1 + \alpha}{\gamma_p + 1} \int_0^t e^{\gamma_p(1-e^{-\tau}) - \tau} d\tau = \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma_p^2} \ln \frac{\gamma_p e^{-t} + 1}{\gamma_p + 1} - \frac{\alpha(1-e^{-t})}{\gamma_p} + \frac{\gamma_p + 1 + \alpha}{\gamma_p(\gamma_p + 1)} [e^{\gamma_p(1-e^{-t})} - 1]. \end{aligned}$$

In definitiva è dunque, limitatamente al solo primo termine dello sviluppo della $\eta(x)$, e scrivendo $F_1(t) = F(t)$, $\gamma_1 = \gamma$:

$$(28) \quad \begin{aligned} \Delta_o(t) &= \frac{8}{15} \frac{H_o f^2 l}{K} [1 + \alpha(1 - e^{-t})] + \frac{512 (H_g + H_o) H_o f^2 l}{K \pi^6 \left(\frac{\pi^2}{l^2} K - H_o - H_g \right)} \cdot \\ &\cdot \left\{ F(t) + \alpha \left[-\frac{\alpha}{\gamma^2} \ln \frac{\gamma e^{-t} + 1}{\gamma + 1} - \frac{\alpha(1-e^{-t})}{\gamma} + \frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma(\gamma + 1)} [e^{\gamma(1-e^{-t})} - 1] \right] \right\} \end{aligned}$$

Il primo termine della (28) è il valore $\Delta_1(t)$ che si ricava (4) trascurando le sollecitazioni indotte dalle deformazioni; il secondo è il valore supplementare $\Delta_2(t)$ dovuto all'effetto di queste ultime.

Per $t \rightarrow \infty$ è

$$(29) \quad \begin{aligned} \Delta_o(\infty) &= \frac{8}{15} \frac{H_o f^2 l}{K} (1 + \alpha) + \\ &+ \frac{512 H_o (H_g + H_o) f^2 l}{K \pi^6 \left(\frac{\pi^2}{l^2} K - H_o - H_g \right)} \left\{ \frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma + 1} e^{\gamma} + \alpha \left[\frac{\alpha}{\gamma^2} \ln(\gamma + 1) - \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma(\gamma + 1)} (e^{\gamma} - 1) \right] \right\} \end{aligned}$$

Si verifica dalla (29) che, per $\alpha = 0$, si ricade nella (2), valida in assenza di viscosità; per $\gamma = \infty$ (instabilità) è $\Delta_o = \infty$.

4.) *Esempio numerico.* — Si prenda ad esempio un arco sottile a profilo parabolico delle seguenti caratteristiche:

$$l \doteq 50 \text{ m}$$

$$f = 5 \text{ m}$$

$$K = 600.000 \text{ t m}^2$$

$$H_g = 300 \text{ t}$$

$$\alpha = 3$$

$$H_c = 3 \text{ t}$$

Per esso risulta

$$\sigma_1 = \frac{\pi^2}{l^2} K = 2369 \text{ t.}$$

$$\Delta_1(0) = \frac{8}{15} \frac{H_c f^2 l}{K} = 0,0033 \text{ m.}$$

$$\Delta_2(0) = \frac{512 H_c (H_g + H_c) f^2 l}{K \pi^6 (\sigma_1 - H_g - H_c)} = 0,00049 \text{ m.}$$

$$\gamma = \frac{\alpha (H_g + H_c)}{\sigma_1 - H_g - H_c} = 0,44$$

$$e^\gamma = 1,553$$

$$\ln(\gamma + 1) = 0,3646$$

$$\frac{\alpha}{\gamma^2} \ln(\gamma + 1) = 6,6498$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 6,818 \quad ; \quad \frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma(\gamma + 1)} (e^\gamma - 1) = 3,87;$$

$$\frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma + 1} e^\gamma = 4,788$$

$$\frac{\alpha}{\gamma^2} \ln(\gamma + 1) - \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma(\gamma + 1)} (e^\gamma - 1) = 2,702$$

$$\frac{\gamma + 1 + \alpha}{\gamma + 1} e^\gamma + 2,702 \alpha = 12,894$$

$$\Delta_1(\infty) = (1 + \alpha) \Delta_1(0) = 0,0133 \text{ m.}$$

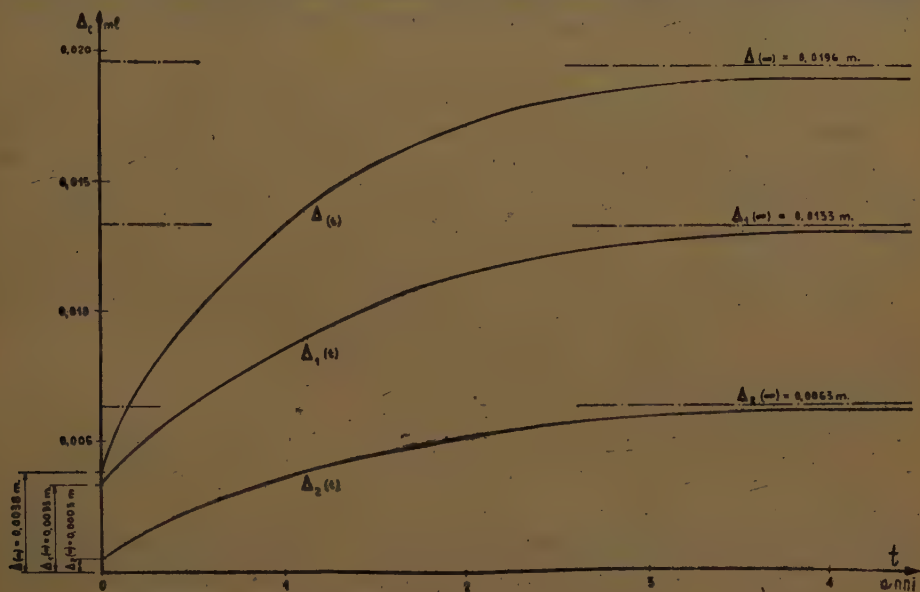
$$\Delta_2(\infty) = 0,000488 \times 12,894 = 0,0063 \text{ m.}$$

In figura sono riportati i valori $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ e quelli somma:

$$\Delta(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t).$$

5.) *Alcune considerazioni.* — Sorge adesso spontanea l'idea di studiare l'influenza della viscosità sulla caduta di spinta per sforzo normale. È noto come lo stato tensionale in una struttura non soggetta a distorsioni

sia invariante rispetto alla viscosità, e quindi come questa attutisca la caduta di spinta per ritiro, ma non quella dovuta all'accorciamento per sforzo assiale provocato dai carichi applicati. Quanto sopra, però, vale sotto due ipotesi, e cioè che la linearità tra le componenti dello sforzo e della deformazione continui a sussistere in campo viscoso, e che gli spostamenti siano così piccoli da non alterare le caratteristiche della sollecitazione:



nel caso degli archi sottili l'ultima delle due ipotesi cade in difetto. Poiché la H_c , ricavata con il procedimento della nota [1] (che, con parola presa in prestito dalla teoria dei ponti sospesi, si può chiamare « dell'inflessione »), è inferiore a quella H_1 ricavabile con la teoria comune, si deduce che le deformazioni inducono una spinta H_2 che si viene a sottrarre alla H_1 .

Con la viscosità si incrementano le deformazioni: parrebbe quindi logico prevedere, almeno qualitativamente, un aumento dei loro effetti, e una diminuzione, nel tempo, della caduta di spinta. Anche nel caso in esame la viscosità avrebbe, quindi, un benefico effetto. Sarà trattato quest'argomento in una prossima nota.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, novembre 1950.

[1] V. FRANCIOSI, *Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati*, Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, novembre 1950.

[2] G. KRALL, *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni*, Rend. Acc. Lincei, 1947.

CONTRIBUTO AL CALCOLO DELLE STRUTTURE SCATOLARI

Nota del dott. Elio Giangreco, presentata dal socio corr. A. Galli

(Adunanza del dì 3 febbraio 1951)

Sunto. — Si propone un procedimento di calcolo delle strutture scatolari valido quando il comportamento di ciascun foglio si discosta da quello di trave per avvicinarsi a quello di lastra: in base alla conoscenza della funzione di AIRY si determina lo stato tensionale dei singoli fogli e si perviene, attraverso il rispetto della continuità lungo gli spigoli di saldatura, ad equazioni perfettamente analoghe a quelle dei tre tagli che si stabiliscono con la teoria ordinaria. Si riporta un' applicazione ad una struttura scatolare per diversi rapporti di allungamento dei singoli fogli.

1.) Nel calcolo degli sforzi interni provocati dai carichi in una struttura scatolare si usa seguire un procedimento già vantaggiosamente applicato allo studio di altri tipi di costruzione: propriamente si comincia col fare alcune ipotesi semplificative sul comportamento della struttura sotto l'azione dei carichi, sul suo modo di deformarsi e sulla efficacia dei vincoli interni esistenti fra i vari fogli; precisamente si ammette che:

1) ciascun foglio non opponga alcuna resistenza per deformazioni fuori del proprio piano;

2) l'azione mutua che si trasmettono due fogli contigui lungo il loro spigolo di saldatura si possa ridurre soltanto ad una forza parallela allo spigolo stesso il che equivale a ritenere il collegamento tra un foglio e l'altro effettuato per mezzo di una cerniera cilindrica.

Con queste ipotesi si riporta la struttura ad uno schema semplificato nel quale riesce notevolmente agevole determinare le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione: queste caratteristiche così calcolate vengono denominate sforzi principali.

Quando poi si voglia tener conto che ogni foglio oppone una resistenza sia pur limitata a deformarsi anche fuori del proprio piano e che il collegamento tra due fogli contigui sia assimilabile meglio ad un incastro che ad una cerniera poichè per continuità sono impediti le variazioni angolari, occorrerà pensare che l'azione mutua che si esplica tra due fogli non consiste di una semplice forza, ma anche di momenti.

In questo schema così corretto si calcolano altre sollecitazioni dette sforzi secondari che, sovrapponendosi agli sforzi principali, siano capaci di portare la deformazione della volta al rispetto dei nuovi vincoli ora intro-

dotti. Senza addentrarci su questa seconda parte che è già stata esaurientemente trattata dal FLÜGGE¹⁾ consideriamo per un momento il primo schema di calcolo a cui si fa riferimento e per l'approssimazione che esso fornisce, sufficiente ai bisogni della tecnica corrente e per l'enorme semplicità che esso presenta rispetto al metodo corretto; comunque anche in questo schema di prima approssimazione ciascun foglio viene sempre assimilato ad un solido di DE S. VENANT con la dimensione longitudinale preponderante rispetto alle trasversali: ne consegue un comportamento tipo trave non sempre giustificabile dato che in particolare per alcuni rapporti dei lati il comportamento si avvicina più a quello di una lastra qual'è per es. il caso delle tramogge dei silos.

Convienne allora affrontare il problema assumendo come incognite le tre tensioni σ_z , σ_x e τ_{xz} e per esse la funzione di AIRY legata alle precedenti dalle relazioni:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}.$$

L'equazione determinatrice di F è la ben nota condizione di biarmonicità

$$(1) \quad \Delta \Delta F = 0$$

che va integrata con rispetto delle condizioni al contorno cui devono soddisfare le componenti di tensione.

Lo studio viene così svolto considerando ciascun foglio della struttura scatolare per es. l'im^o come una lastra sollecitata da un carico trasversale ripartito p_i dovuto alla differenza delle componenti dei carichi esterni nel piano del foglio e ad una distribuzione di tensioni tangenziali τ_i e τ_{i-1} incognite agenti sul bordo inferiore e superiore, che rappresentano l'azione trasmessa ai due fogli contigui lungo gli spigoli di saldatura. L'eguaglianza delle tensioni σ_z lungo detti spigoli conduce ad un sistema di tante equazioni lineari non omogenee quanti sono i tagli incogniti τ_i , dopo di che il problema è completamente risolto.

Allo scopo di fornire risultati pronti per le pratiche applicazioni ho tabellato i valori delle tensioni σ_z , σ_x , τ_{xz} per diversi rapporti tra la larghezza e la lunghezza del foglio da 1:3 a 1:1. Con riferimento poi ad un caso concreto (struttura scatolare a cinque fogli) mi sono servito dei valori trovati per determinare lo stato tensionale dell'intera struttura e confrontarlo con quello, che si avrebbe applicando il metodo usuale: naturalmente le divergenze sono tanto maggiori quanto più ci si allontana dal rapporto 1:3 verso il rapporto 1:1 con uno scarto percentuale massimo che va dal 12,22% al 54,11% rispetto ai valori calcolati con la teoria ordinaria.

¹⁾ FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, pag. 178.

2) Si consideri una lastra (vedi fig. 1) appoggiata agli estremi e si assuma per la $F(xz)$ un'espressione del tipo:

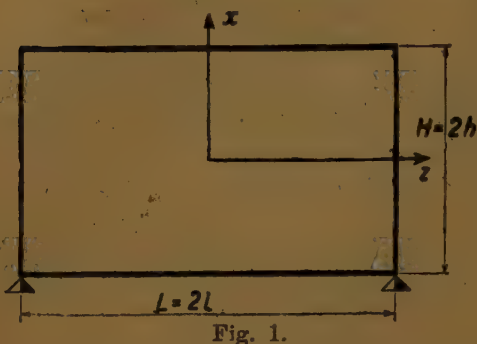


Fig. 1.

$$F(xz) = X(x) \cos \alpha z \quad \alpha = \frac{\pi}{2l}$$

che soddisfa la (1) se la X soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$(2) \quad \frac{d^4 X}{dx^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^4 X = 0$$

il cui integrale generale è ben noto e della forma:

$$X(x) = C_1 \operatorname{Ch} \alpha x + C_2 \operatorname{Sh} \alpha x + C_3 x \operatorname{Ch} \alpha x + C_4 x \operatorname{Sh} \alpha x$$

per cui la funzione delle tensioni diventa:

$$(3) \quad F(xz) = (C_1 \operatorname{Ch} \alpha x + C_2 \operatorname{Sh} \alpha x + C_3 x \operatorname{Ch} \alpha x + C_4 x \operatorname{Sh} \alpha x) \cos \alpha z$$

e le componenti di tensione valgono:

$$\sigma_z = \alpha [C_1 \alpha \operatorname{Ch} \alpha x + C_2 \alpha \operatorname{Sh} \alpha x + C_3 (2 \operatorname{Sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{Ch} \alpha x) + C_4 (2 \operatorname{Ch} \alpha x + \alpha x \operatorname{Sh} \alpha x)] \cos \alpha z$$

$$(4) \quad \sigma_x = -\alpha^2 [C_1 \operatorname{Ch} \alpha x + C_2 \operatorname{Sh} \alpha x + C_3 x \operatorname{Ch} \alpha x + C_4 x \operatorname{Sh} \alpha x] \cos \alpha z$$

$$\tau_{xz} = \alpha [C_1 \alpha \operatorname{Sh} \alpha x + C_2 \alpha \operatorname{Ch} \alpha x + C_3 (\alpha x \operatorname{Sh} \alpha x + \operatorname{Ch} \alpha x) + C_4 (\alpha x \operatorname{Ch} \alpha x + \operatorname{Sh} \alpha x)] \sin \alpha z$$

con le 4 costanti da determinarsi in base alle condizioni al contorno nelle quali compaiono esplicitamente le forze esterne. Per riguardo a queste ultime ciascun foglio può considerarsi come una lastra appoggiata agli estremi e soggetta ad una distribuzione di carico uniformemente ripartito dovuto alle differenze Δg delle componenti assiali e ad una distribuzione di carichi tangenziali dovuti alla presenza della saldatura tra foglio e foglio. Esaminiamo separatamente queste diverse condizioni:

1) Condizione di carico uniforme.

Si decomponga il carico (vedi fig. 2a) in condizioni di carico simmetrico p_s (vedi fig. 2b) ed emisimmetrico p_e (vedi fig. 2c):

a) per effetto di p , si ha uno stato di tensione monoassiale con la sola

$$\sigma_x = -p/z$$



Fig. 2 a

b) per quanto riguarda il carico emisimmetrico scomponiamo questo mediante lo sviluppo in serie di FOURIER:

$$(5) \quad p_e = \frac{p_0}{2} = \sum A_n^e \cos \alpha_n z = \sum p_n^e$$

con i coefficienti A_n^e forniti da:

$$A_n^e = \frac{2}{l} \int_{-l}^l p_e \cos \alpha_n z \, dz$$

che risultano diversi da 0 sono per valori dispari dell'indice n . Quindi il carico (5) si può scrivere limitandosi ai primi tre termini dello sviluppo:

$$p_e = \frac{p_0}{2} = \frac{2p_0}{\pi} \cos \frac{\pi z}{2l} - \frac{2p_0}{3\pi} \cos \frac{3\pi z}{2l} + \frac{2p_0}{5\pi} \cos \frac{5\pi z}{2l}$$



Fig. 2 b

e la sua decomposizione nelle diverse armoniche è indicata in fig. 3.

Le condizioni al contorno sono:



Fig. 2 c

$$\text{per } x = \pm h \quad \sigma_x = \mp p_h^e \quad \tau_{xz} = 0$$

con ciò si ha:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{2A_n^e}{\alpha^2} \frac{\alpha h \operatorname{Sh} \alpha h + \operatorname{Ch} \alpha h}{2\alpha h - \operatorname{Sh} \alpha h}$$

$$C_3 = \frac{2A_n^e}{\alpha} \frac{\operatorname{Ch} \alpha h}{2\alpha h - \operatorname{Sh} \alpha h} \quad C_4 = 0$$

che sostituite nelle (4) danno:

$$\sigma_z = - \sum \frac{2 A_n^e \cos \alpha z}{2\alpha h - \text{Sh } 2\alpha h} (\alpha h \text{Sh } \alpha h \text{Sh } \alpha x - \text{Ch } \alpha h \text{Sh } \alpha x - \alpha x \text{Ch } \alpha h \text{Ch } \alpha x)$$

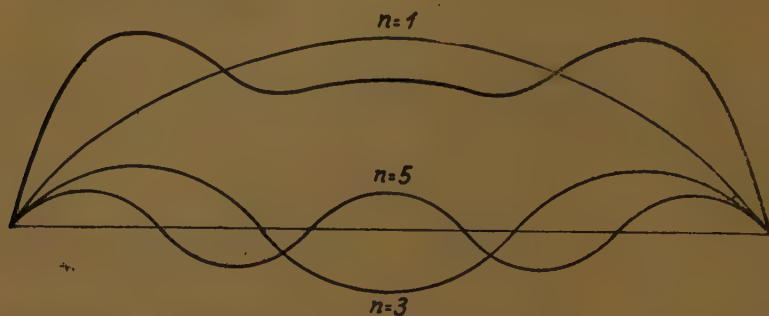


Fig. 3.

$$\sigma_x = \sum \frac{2 A_n^e \cos \alpha z}{2\alpha h - \text{Sh } 2\alpha h} (\alpha h \text{Sh } \alpha h \text{Sh } \alpha x + \text{Ch } \alpha h \text{Sh } \alpha x - \alpha x \text{Ch } \alpha h \text{Ch } \alpha x)$$

$$\tau_{xz} = - \sum \frac{2 A_n^e \text{Sh } \alpha z}{2\alpha h - \text{Sh } 2\alpha h} (\alpha h \text{Sh } \alpha h \text{Ch } \alpha x - \alpha x \text{Ch } \alpha h \text{Sh } \alpha x).$$

II) Condizioni di carico tangenziale.

Supponiamo che il carico tangenziale varii con legge sinusoidale (vedi

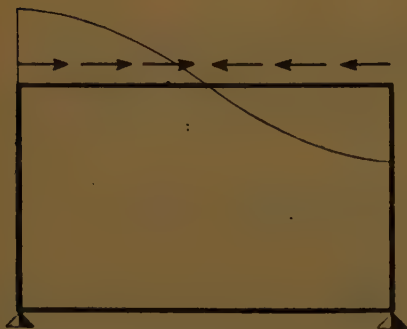


Fig. 4 a



Fig. 4 b

fig. 4 a) del tipo:

$$\tau = \tau_0 \sin \alpha z \quad \alpha = \frac{\pi}{2l}$$

e decomponiamolo in due condizioni: una simmetrica (vedi fig. 4 b):

$$\tau = \frac{\tau_0}{2} \sin \alpha z \quad \tau' = \frac{\tau_0}{2} \sin \alpha z$$

ed una emisimmetrica (vedi fig. 4 c):

$$\tau = \frac{\tau_0}{2} \sin \alpha z \quad \tau' = -\frac{\tau_0}{2} \sin \alpha z$$

a) per il carico tangenziale simmetrico le condizioni al contorno sono:

per $x = \pm h$ $\sigma_x = 0$ $\tau_{xz} = -\frac{\tau_0}{2} \sin \alpha z$

e le costanti valgono:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{-\tau_0 h \operatorname{Ch} \alpha h}{\alpha(2\alpha h - \operatorname{Sh} 2\alpha h)}$$

$$C_3 = \tau \frac{\tau_0 \operatorname{Sh} \alpha h}{\alpha(2\alpha h - \operatorname{Sh} 2\alpha h)} \quad C_4 = 0$$



Fig. 4 c

e le componenti di tensione

$$\sigma_z = \frac{-\tau_0 \cos \alpha z}{2\alpha h - \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x - 2\operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x]$$

$$\sigma_x = \frac{\tau_0 \cos \alpha z}{2\alpha h - \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x]$$

$$\tau_{xz} = \frac{-\tau_0 \sin \alpha z}{2\alpha h - \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x - \alpha x \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x - \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x]$$

b) per il carico tangenziale emisimmetrico le condizioni al contorno sono:

per $x = \pm h$ $\sigma_x = 0$ $\tau_{xz} = \pm \tau_0 \sin \alpha z$

e le costanti valgono:

$$C_1 = \frac{\tau_0 h \operatorname{Sh} \alpha h}{\alpha(2\alpha h + \operatorname{Sh} 2\alpha h)} \quad C_2 = C_3 = 0 \quad C_4 = -\frac{\tau_0 \operatorname{Ch} \alpha h}{\alpha(2\alpha h + \operatorname{Sh} 2\alpha h)}$$

le quali sostituite nelle (5) forniscono:

$$\sigma_z = \frac{\tau_0 \cos \alpha z}{2\alpha h + \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x - 2\operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x - \alpha x \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x]$$

$$\sigma_x = \frac{-\tau_0 \cos \alpha z}{2\alpha h + \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x - \alpha x \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x]$$

$$\tau_{xz} = \frac{\tau_0 \sin \alpha z}{2\alpha h + \operatorname{Sh} 2\alpha h} [\alpha h \operatorname{Sh} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Ch} \alpha x - \operatorname{Ch} \alpha h \operatorname{Sh} \alpha x]$$

Siamo così pervenuti alla conoscenza dello stato tensionale di ciascun

foglio per effetto del carico uniformemente distribuito funzione dei carichi esterni e quindi noto e per effetto del carico tangenziale incognito. Per determinare quest'ultimo basterà imporre, non essendo ammissibili discontinuità, l'eguaglianza delle sollecitazioni σ_z lungo ogni linea di saldatura. Questa condizione fornisce tante equazioni quanti sono gli spigoli e quindi le τ incognite, ricavate queste ultime lo stato dimensionale è individuato punto per punto.

3.) Nelle tabelle 1 e 2 sono consegnati i valori delle tensioni σ_z , σ_x , τ_{xz} per la condizione di carico uniformemente ripartita (risultante della simmetrica ed emisimmetrica) e tangenziale (risultante della simmetrica e delle emisimmetriche) per i seguenti rapporti tra larghezza e lunghezza dei lati 1/3 — 1/2 — 2/3 — 3/4 — 1.

4) Si consideri la struttura scatolare della fig. 5a simmetrica ed a lati eguali, soggetta ad un carico uniformemente ripartito p : si riducono le forze su nodi attraverso le reazioni della trave continua (vedi fig. 5b)

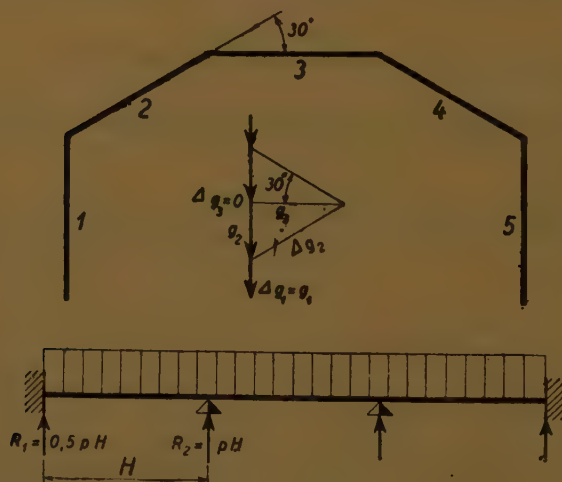


Fig. 5a, 5b, 5c

e mediante la decomposizione indicata in fig. 5c si determinano i carichi per unità di lunghezza agenti su ciascun foglio:

$$\Delta g_1 = 0,5 pH \quad \Delta g_2 = 2 pH \quad \Delta g_3 = 0.$$

Per determinare le sollecitazioni incognite τ avvaliamoci dell'eguaglianza delle σ_z lungo ogni linea di saldatura: si ottengono così per i diversi rapporti studiati i seguenti sistemi di due equazioni in due incognite:

Carico tangenziale risultante

$$\sigma_{x/\tau_0} \cos \alpha z$$
 $\sigma_z, T_0, \cos \alpha z$
$$\tau_x | \tau_0 \text{ sen } \alpha z$$
[illegible]

TABELLA II

Carico uniforme risultante (sez. di mezzeria) ¹⁾

$\frac{h/l}{\alpha}$	σ_z/p_0					σ_x/p_0				
	1/3	1/2	2/3	3/4	1	1/3	1/2	2/3	3/4	1
h	7,0230	3,2450	1,9412	1,5898	1,0254	1,0240	1,0540	1,0502	1,0025	1,9814
$3/3 h$	5,0650	1,9454	1,2695	0,9795	0,5410	0,9990	1,0010	0,9849	1,0072	0,9242
$1/2 h$	3,2990	1,3882	0,7424	0,5781	0,2741	0,8710	0,8840	0,8550	0,8249	0,8437
$1/4 h$	1,6210	0,6717	0,3367	0,2596	0,1205	0,6910	0,6910	0,6870	0,6785	0,5973
0	0	0	0	0	0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
$-1/4 h$	1,6210	0,6717	0,3367	0,2596	0,1205	0,3090	0,3090	0,3121	0,3215	0,4027
$-1/2 h$	3,2990	1,3882	0,7424	0,5781	0,2741	0,1290	0,1160	0,1440	0,1751	0,1563
$-3/4 h$	5,0650	1,9454	1,2695	0,9795	0,5410	0,0010	0,0010	0,0151	0,0072	0,0758
$-h$	7,0230	3,2450	1,9412	1,5898	1,0254	0,0240	0,0540	0,0502	0,0025	0,0186

¹⁾ Non è riportata la tabella delle τ_{xz} , che nella sezione di mezzeria sono sempre nulle.

$$\left. \begin{aligned} -7,023 \Delta g_1 - 4,108 \tau_1 &= 7,023 \Delta g_2 + 4,108 \tau_1 + 1,842 \tau_2 \\ -7,023 \Delta g_2 - 1,842 \tau_1 &= -4,108 \tau_2 + 4,108 \tau_2 - 1,842 \tau_1 \\ \tau_1 &= -1,7568 \text{ pH} \quad \tau_2 = -1,6959 \text{ pH} \end{aligned} \right\} \frac{h}{l} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} -3,245 \Delta g_1 - 2,474 \tau_1 &= 3,245 \Delta g_2 + 2,973 \tau_1 + 1,159 \tau_2 \\ -3,245 \Delta g_2 - 1,159 \tau_1 &= 2,973 \tau_2 + 2,973 \tau_2 - 1,159 \tau_1 \\ \tau_1 &= -1,1547 \text{ pH} \quad ; \quad \tau_2 = -1,0762 \text{ pH} \end{aligned} \right\} \frac{h}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} -1,941 \Delta g_1 - 2,474 \tau_1 &= 1,941 \Delta g_2 + 2,474 \tau_1 + 0,794 \tau_2 \\ -1,941 \Delta g_2 - 0,794 \tau_1 &= 2,474 \tau_2 + 2,474 \tau_2 - 0,794 \tau_1 \\ \tau_1 &= -0,8571 \text{ pH} \quad \tau_2 = -0,7707 \text{ pH} \end{aligned} \right\} \frac{h}{l} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} -1,589 \Delta g_1 - 2,330 \tau_1 &= 1,589 \Delta g_2 + 2,339 \tau_1 + 0,671 \tau_2 \\ -1,589 \Delta g_2 - 0,671 \tau_1 &= 2,339 \tau_2 + 2,339 \tau_2 - 0,671 \tau_1 \\ \tau_1 &= -0,7536 \text{ pH} \quad \tau_2 = -0,6669 \text{ pH} \end{aligned} \right\} \frac{h}{l} = \frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} -1,025 \Delta g_1 - 2,116 \tau_1 &= 1,025 \Delta g_2 + 2,116 \tau_1 + 0,402 \tau_2 \\ -1,025 \Delta g_2 - 0,402 \tau_1 &= 2,116 \tau_2 + 2,116 \tau_2 - 0,402 \tau_1 \\ \tau_1 &= -0,5601 \text{ pH} \quad \tau_2 = -0,4765 \text{ pH} \end{aligned} \right\} \frac{h}{l} = 1.$$

Volendo calcolare la stessa struttura con il metodo usuale l'eguaglianza delle σ_x su due bordi contigui porta al sistema:

$$\begin{aligned} \frac{6 M_1}{dH^2} - \frac{4 T_1}{dH} &= -\frac{6 M_2}{dH^2} + \frac{2 T_2}{dH} + \frac{4 T_1}{dH} \\ \frac{6 M_2}{dH^2} - \frac{4 T_1}{dH} - \frac{2 T_1}{dH} &= -\frac{2 T_2}{dH} + \frac{4 T_2}{dH} \end{aligned}$$

dove le T sono le risultanti della distribuzione τ : fissando l'attenzione sulla sezione di mezzeria dove:

$$\begin{aligned} M_1 &= \Delta g_1 l^2/8 = -0,0625 \text{ pH } l^2 \\ M_2 &= \Delta g_2 l^2/8 = -0,2500 \text{ pH } l^2 \end{aligned}$$

si ha:

$$T_1 = -0,1876 \text{ pH } l \quad T_2 = -0,1875 \text{ pH } l.$$

5) Nella seguente tabella III sono riportati i valori delle tensioni σ_A σ_B σ_C ricavate secondo i due metodi quello usuale (*) e quello proposto (***) con i relativi errori percentuali.

TABELLA III.

$h/l =$	1/3	1/2	2/3	3/4	1	
σ_A	(*)	— 0,0006	— 0.0004	— 0,0003	— 0,00027	— 0.0002
	(**)	0,0918	0,1421	0,1933	0,2166	0,2874
	errore	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
	(*)	1,1262	0,7508	0,5631	0,5005	0,3754
σ_B	(**)	1,2351	0,9052	0,7667	0,7261	0,6727
	errore	8,82 %	17,06 %	26,55 %	31,07 %	44,19 %
	(*)	1,1244	0,7495	0,5622	0,4997	0,3748
	(**)	1,2810	0,9761	0,8632	0,8343	0,8168
σ_C	errore	12,22 %	23,20 %	34,87 %	40,10 %	54,11 %

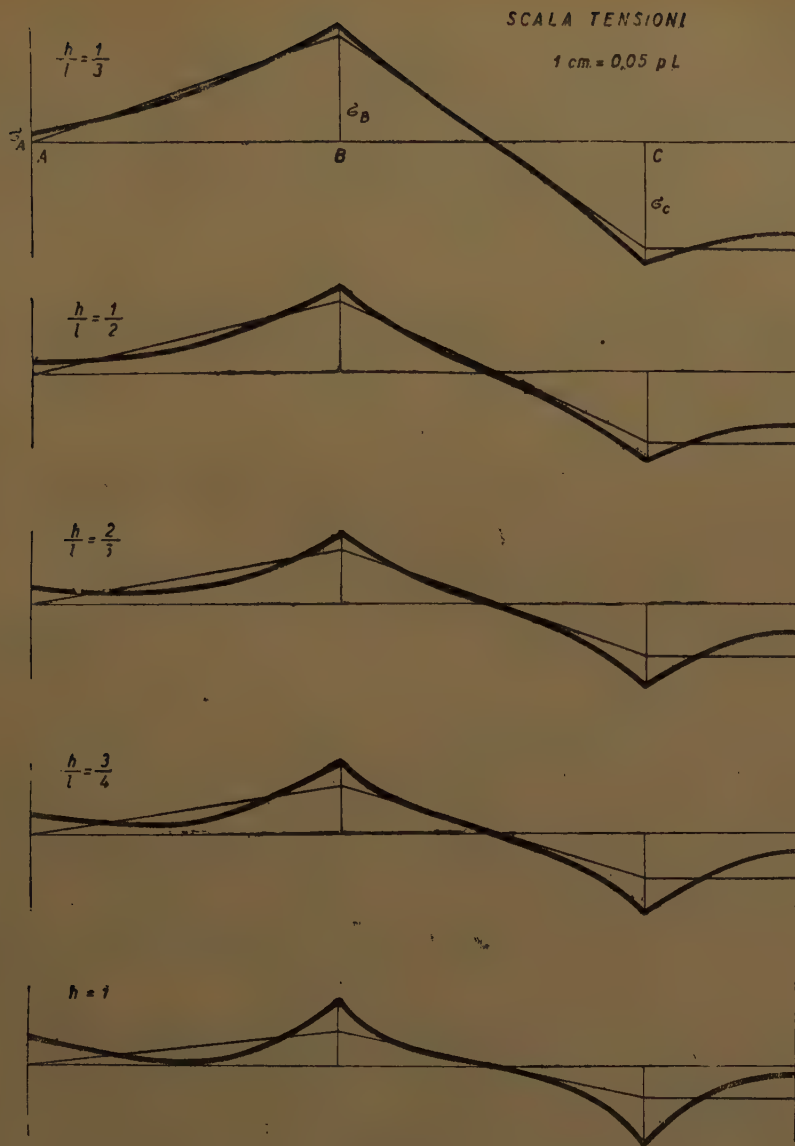


Fig. 6.

Nella figura 6 si è tracciato l'andamento delle σ_x per mezza struttura: le linee tratteggiate e piene si riferiscono rispettivamente ai valori calcolati con il metodo (*) e con il metodo (**).

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni.

I GRUPPI FINITI CHE SONO SOMMA DI QUATTRO SOTTOGRUPPI

Nota del dott. Donato Greco, presentata dal socio corrisp. G. Zappa

(Adunanza del dì 3 marzo 1951)

Sunto. — Si assegnano le condizioni necessarie e sufficienti perchè in un gruppo finito G esistano quattro sottogruppi propri tali che ogni elemento di G appartenga ad almeno uno di essi.

In una Nota del 1926 ¹⁾ G. SCORZA ha effettuato la caratterizzazione dei gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi propri. Con un semplice ed elegante procedimento basato sull'esame diretto dei tre sottogruppi che esauriscono il gruppo, lo SCORZA ha stabilito il risultato ormai ben noto, che *condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo possa pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi è che esso contenga un sottogruppo normale tale che il corrispondente gruppo fattoriale sia isomorfo al Vierergruppe.*

Si presenta dunque naturalmente la questione di ricercare se sia possibile assegnare una caratterizzazione analoga per i gruppi che possono pensarsi come somma di un numero di sottogruppi superiore a tre, e la presente Nota è dedicata appunto ad indagare la natura dei gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi. Tenendo conto di alcune relazioni intercedenti fra gli indici, nel gruppo dato, dei sottogruppi componenti e delle loro reciproche intersezioni, sono giunto ad assegnare una condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G possa pensarsi come somma di quattro sottogruppi. Tale condizione si riduce, analogamente a quel che avviene nella ricerca dello SCORZA, all'esistenza nel gruppo G di un sottogruppo normale N tale che il gruppo fattoriale G/N sia di un tipo determinato.

Precisamente, perchè G sia somma di quattro sottogruppi, senza potersi pensare simultaneamente come somma di tre, possono presentarsi, per G/N , le seguenti alternative: o G/N è isomorfo al gruppo non ciclico di ordine sei od al gruppo Γ_8 non ciclico di ordine nove, oppure G/N è isomorfo al gruppo di ordine diciotto che si ottiene dal Γ_8 suddetto ampliando questo con un elemento di periodo due che trasformi ogni elemento di Γ_8 nel pro-

¹⁾ G. SCORZA, *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi.* Boll. U. M. I. vol. 5, 1926, pp. 216-218.

prio quadrato. Il gruppo G può ancora pensarsi come somma di quattro sottogruppi qualora G/N , pur non rientrando in una delle categorie dianzi menzionate sia isomorfo ad uno dei tre seguenti gruppi di ordine otto: abeliano $(2, 1)$, abeliano $(1, 1, 1)$, diedrico; in tali casi però, poichè entrambi questi ultimi gruppi soddisfano alla condizione dello SCORZA, il gruppo G potrà simultaneamente pensarsi sia come somma di quattro che come somma di tre sottogruppi.

1. Allo scopo di caratterizzare i gruppi che possono pensarsi come somma di quattro sottogruppi, cominciamo col porre in risalto alcune loro proprietà che derivano direttamente dalla natura di siffatti gruppi.

Sia G un tal gruppo e si abbia:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

ove i G_k sono sottogruppi propri di G tre dei quali non esauriscono tutto G .

È evidente che:

I — *Ognuno dei quattro sottogruppi G_k contiene almeno un elemento non appartenente ad alcuno degli altri tre.*

Ricordando ora che un gruppo non può essere esaurito da due suoi sottogruppi ¹⁾ si deduce:

Il — *I quattro sottogruppi G_k hanno, a tre a tre, per unione G .*

Ed inverso se ad esempio non fosse $G_1 \vee G_2 \vee G_3 = G$, G_4 dovrebbe contenere almeno un elemento fuori di $G_1 \vee G_2 \vee G_3$, e, poichè $G_1 \vee G_2 \vee G_3$ contiene sia G_1 che G_2 e G_3 , dovrebbe essere $G = G_1 \vee G_2 \vee G_3 + G_4$, ciò che è assurdo.

Si dimostra poi subito che:

III — *I quattro sottogruppi G_k hanno, a tre a tre, per intersezione uno stesso sottogruppo J di G .*

Inverso se ad es. si suppone che sia:

$$G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \neq G_1 \wedge G_2 \wedge G_4$$

ciò implica l'esistenza di almeno un elemento di $G_1 \wedge G_2 \wedge G_3$ che non appartenga a G_4 oppure di un elemento di $G_1 \wedge G_2 \wedge G_4$ che non appartenga a G_3 . Ma se $g_{1,2,3}$ è un elemento di $G_1 \wedge G_2 \wedge G_3$ esterno a G_4 , detto g_4 un elemento di G_4 , certamente esistente per la I, che non appartenga nè a G_1 , nè a G_2 , nè a G_3 , l'elemento $g = g_{1,2,3} g_4$ non appartiene ad alcuno dei G_k e quindi non può essere in G . L'assurdo cui si perviene evidentemente dimostra la III.

Posto ora:

$$G_i \wedge G_m \wedge G_n = J \quad [i \neq m \neq n]$$

¹⁾ V. G. SCORZA, *Loc. cit.*

per ogni coppia h, k riesce:

$$(1) \quad G_h \wedge G_k \geq J \quad [h \neq k].$$

Orbene:

IV = I *sei sottogruppi $G_h \wedge G_k$ non possono tutti contenere propriamente J ma almeno tre di essi devono coincidere con J .*

Detta infatti (p, q, r, s) una permutazione degli indici 1, 2, 3, 4, si considerino le intersezioni $G_p \wedge G_q$ e $G_r \wedge G_s$. Poichè si ha:

$$(G_p \wedge G_q) \wedge (G_r \wedge G_s) = J,$$

se fosse:

$$(2) \quad G_p \wedge G_q > J \quad ; \quad G_r \wedge G_s > J,$$

dovrebbero esistere simultaneamente almeno un elemento $g_{p,q}$ di $G_p \wedge G_q$ esterno sia a G_r che a G_s ed almeno un elemento $\bar{g}_{r,s}$ di $G_r \wedge G_s$ esterno sia a G_p che a G_q ; ma allora l'elemento $\bar{g} = g_{p,q} \bar{g}_{r,s}$ non potrebbe appartenere ad alcuno dei G_k e quindi non potrebbe essere in G . Ciò prova che le (2) non possono coesistere e quindi, tenendo conto della (1), si conclude che se uno dei due sottogruppi $G_p \wedge G_q$ e $G_r \wedge G_s$ contiene propriamente J l'altro deve necessariamente coincidere con J .

Le relazioni intercedenti tra i sei sottogruppi $G_h \wedge G_k$ ed il sottogruppo intersezione J saranno ulteriormente precisate nel seguito.

2. Le proprietà del numero precedente sussistono sia quando G è un gruppo finito, sia quando G è infinito. Supponendo ora G finito, siano:

$$\begin{array}{ll} i_k \text{ l'indice di } G_k \text{ in } G & ; \quad i^{(k)} \text{ l'indice di } J \text{ in } G_k \\ i_{h,k} \text{ l'indice di } G_h \wedge G_k \text{ in } G & ; \quad i^{(p)}_{h,k} \text{ l'indice di } G_h \wedge G \text{ in } G_p \quad [p=h \text{ o } k] \\ i \text{ l'indice di } J \text{ in } G & ; \quad i^{(h,k)} \text{ l'indice di } J \text{ in } G_h \wedge G_k. \end{array}$$

Poichè G è finito i numeri dianzi introdotti hanno tutti valore finito e sussistono le relazioni:

$$(3) \quad i_{h,k}^{(k)} \leq i_h \quad ; \quad i_{h,k}^{(h)} \leq i_k$$

$$(4) \quad i_{h,k} = i_h \quad i_{h,k}^{(h)} = i_k \quad i_{h,k}^{(k)} \leq i_h \quad i_k.$$

Ciò posto, disponiamo gli indici i_k in ordine non decrescente e sia:

$$(5) \quad i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4.$$

Poichè G è somma dei G_k e questi hanno, a tre a tre, per intersezione J , l'ordine di G si ottiene dalla somma degli ordini dei G_k sottraendone la somma degli ordini delle intersezioni $G_k \wedge G_k$ ed aggiungendo il triplo dell'ordine di J . Se ne trae, per gli indici, la relazione:

$$(6) \quad 1 = \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} - \frac{1}{i_{1,2}} - \frac{1}{i_{1,3}} - \frac{1}{i_{1,4}} - \frac{1}{i_{2,3}} - \frac{1}{i_{2,4}} - \frac{1}{i_{3,4}} + \frac{3}{i}.$$

Ora per essere $i \geq i_{h,k}$, risulta:

$$\frac{3}{i} - \frac{1}{i_{1,2}} - \frac{1}{i_{1,3}} - \frac{1}{i_{1,4}} \leq 0$$

onde, tenendo conto delle (4), dalla (6) si deduce:

$$(7) \quad 1 + \frac{1}{i_1} \left[\frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} \right] \leq \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4}.$$

Ne segue che:

V — Il minore degli indici i_k non può essere che due o tre.

Esamineremo separatamente i due casi $i_1 = 2$ ed $i_1 = 3$.

3. Supponiamo in primo luogo $i_1 = 2$.

Il sottogruppo G_1 ha indice 2 ed è quindi normale in G ; l'intersezione $G_1 \wedge G_k$ ($k = 2, 3, 4$) è allora normale in G_k ed ha, in G_k , indice due. Si ha dunque:

$$(8) \quad i_1 = i_{1,2}^{(2)} = i_{1,3}^{(3)} = i_{1,4}^{(4)} = 2$$

e dalla (4) si trae:

$$(9) \quad i_{1,k}^{(1)} = i_k.$$

Le (4) e (9) forniscono dunque:

$$(10) \quad i_{1,k} = i_1 i_k = 2 i_k.$$

La (7) per $i_1 = 2$, diventa poi:

$$(11) \quad 1 \leq \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4}$$

onde sono da distinguersi due alternative:

A — Il minore degli indici i_2, i_3, i_4 è maggiore di due.

B — Il minore degli indici i_2, i_3, i_4 è ancora due.

4. Nel caso A di cui al comma precedente, dovendo essere $i_2 \geq 3$, la (11), per la (5), fornisce:

$$(12) \quad i_1 = i_2 = i_4 = 3$$

e, dopo ciò, dalle (10) e (6), tenendo conto della relazione $i \geq i_{h,k}$, si trae:

$$(13) \quad i = i_{h,k} = 6.$$

Se ne deduce, qualunque siano h e k : $G_h \wedge G_k = J$. Il sottogruppo J risultando allora normale in G_1 , G_2 e G_4 è normale nell'unione di tali sottogruppi e cioè in G . Si può pertanto affermare che:

VI — *Se uno solo dei quattro sottogruppi G_k ha indice due in G , gli altri tre hanno tutti indice tre; inoltre i quattro sottogruppi si intersecano, a due a due, in uno stesso sottogruppo J normale e di indice sei in G .*

Se allora si considera il gruppo fattoriale G/J , esso risulta essere un gruppo del sesto ordine che, dato l'omomorfismo intercedente tra G e G/J , è a sua volta somma di quattro sottogruppi. G/J è dunque il gruppo non ciclico di ordine sei.

Passiamo ora all'esame del caso B , ossia poniamo $i_1 = 2$.

I due sottogruppi G_1 e G_2 sono entrambi normali e di indice due in G . L'intersezione $G_1 \wedge G_2$ è allora normale in G e vi ha indice quattro, mentre le intersezioni $G_1 \wedge G_k$ e $G_2 \wedge G_h$ sono rispettivamente normali in G_k ed in G_h ed hanno, in tali sottogruppi, indice due. Le (8) e (10) vanno dunque completate come segue:

$$\begin{aligned} i_1 = i_{1,k}^{(k)} = i_2 = i_{2,h}^{(h)} &= 2 & [k \neq 1, h \neq 2] \\ i_{1,2} &= 4; \quad i_{1,k} = i_{2,k} = 2i_k & [k = 3, 4]. \end{aligned}$$

La (6) diviene allora:

$$(14) \quad \frac{1}{4} = -\frac{1}{i_{2,4}} + \frac{3}{i}$$

onde, tenendo conto del fatto che i G_k sono sottogruppi propri di G e che, essendo $J \leq G_1 \wedge G_2$, i deve essere multiplo di quattro, le uniche soluzioni possibili della (14) sono:

$$i_{2,4} = 2, \quad i = 4 \quad \text{ed} \quad i_{2,4} = 8, \quad i = 8.$$

La prima di queste è senz'altro da scartarsi in quanto il sottogruppo $G_2 \wedge G_4$ non può avere indice due perchè G_2 e G_4 hanno entrambi indici non inferiore a due. Ne segue:

$$i_{2,4} = i = 8.$$

Si ha dunque, per le (4):

$$i_{3,4}^{(3)} i_3 = i_{3,4}^{(4)} i_4 = 8$$

e, poichè, ponendo nella (7) $i_1 = i_2 = 2$, si trova:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4}$$

se ne deduce:

$$i_3 = i_4 = 4 \quad ; \quad i_{3,4}^{(3)} = i_{3,4}^{(4)} = 2.$$

I sottogruppi G_3 e G_4 hanno dunque entrambi indice quattro in G . La intersezione comune J , che ha indice otto in G , coincide con $G_3 \wedge G_4$ e si ha:

$$G_1 \wedge G_2 > J = G_1 \wedge G_3 = G_1 \wedge G_4 = G_2 \wedge G_3 = G_2 \wedge G_4 = G_3 \wedge G_4.$$

Posto allora:

$$G_1 \wedge G_2 + G_3 + G_4 = \overline{G},$$

dico che \overline{G} è un sottogruppo d'indice due del gruppo G . Osserviamo infatti in primo luogo che se g è un elemento di $G_1 \wedge G_2$, esterno a J , e $g_3 (g_4)$ è un elemento di $G_3 (G_4)$, anch'esso esterno a J , il prodotto $g g_3 (g g_4)$ non può essere in $G_1 \wedge G_2$ perchè in tal caso $g_3 (g_4)$ sarebbe anch'esso in $G_1 \wedge G_2$ e quindi apparterrebbe tanto a G_1 che a G_2 , contro l'ipotesi; il prodotto $g g_3 (g g_4)$ non può però neanche essere in G_3 (in G_4) perchè allora ivi dovrebbe essere anche g , contro l'ipotesi che g sia esterno a J . Il prodotto $g g_3 (g g_4)$ deve dunque essere necessariamente in G_4 (in G_3). Per dimostrare dunque che \overline{G} è un sottogruppo di G basta ovviamente far vedere che il prodotto di un elemento di G_3 esterno a J per un elemento di G_4 a sua volta esterno a J è contenuto in $G_1 \wedge G_2$. Ora, poichè G_1 e G_2 sono entrambi normali e di indice due in G , comunque si fissi un elemento g_2 di G_2 , non appartenente a J , ed un elemento g_4 di G_4 , anch'esso non appartenente a J , detto g_1 un elemento di G_1 , esterno a $G_1 \wedge G_2$, è sempre possibile determinare due elementi g_3 e g_3' di G_3 , eventualmente coincidenti ed entrambi esterni a $G_1 \wedge G_2$, in modo da aversi ¹⁾:

$$g_3 = g_1^{-1} g_2 \quad ; \quad g_4 = g_3' g_1.$$

Con ciò si ha:

$$g_3 g_4 = g_1^{-1} (g_3 g_3') g_1$$

¹⁾ Si noti che se g_1 è un elemento di G_1 , esterno a $G_1 \wedge G_2$, anche l'elemento g_1^{-1} è esterno a $G_1 \wedge G_2$.

donde, per la normalità di G_1 :

$$g_3, g_4 < G_1.$$

In modo analogo si dimostra essere:

$$g_3, g_4 < G_1$$

e, di conseguenza:

$$g_3, g_4 < G_1 \wedge G_2.$$

È così dimostrato che \overline{G} è un sottogruppo di G . Che poi \overline{G} abbia indice due in G segue subito dall'essere $\overline{G} \wedge G_1 = \overline{G} \wedge G_2 = G_1 \wedge G_2$.

Il gruppo G si presenta allora come somma di tre sottogruppi:

$$G = G_1 + G_2 + \overline{G}$$

tutti normali e di indice due in G .

G può dunque pensarsi simultaneamente sia come somma di quattro che come somma di tre sottogruppi.

Il gruppo fattoriale $G/(G_1 \wedge G_2)$ è allora un gruppo quadrinomio, mentre il gruppo fattoriale G/J è un gruppo di ordine otto, non ciclico, somma di tre sottogruppi di indice due, di cui uno, a sua volta, può pensarsi come somma di tre sottogruppi di indice due. Di gruppi di ordine otto rispondenti a tale proprietà ne esistono tre e sono: il gruppo diedrico, di generatori:

$$g_1^4 = g_2^4 = 1 \quad ; \quad g_2, g_1 = g_1^3 g_2,$$

il gruppo abeliano $(2, 1)$, di generatori:

$$g_1^4 = g_2^2 = 1 \quad ; \quad g_2, g_1 = g_1, g_2,$$

e il gruppo abeliano $(1, 1, 1)$, di generatori:

$$g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = 1 \quad ; \quad g_1, g_2 = g_2, g_1 \quad , \quad g_1, g_3 = g_3, g_1 \quad , \quad g_2, g_3 = g_3, g_2.$$

Di essi il primo è somma di tre sottogruppi di indice due, di cui due ciclici ed uno quadrinomio, onde tale gruppo può, in uno ed un sol modo pensarsi come somma di quattro sottogruppi, i due ciclici di indice due e i due di indice quattro appartenenti al gruppo quadrinomio e non coincidenti con l'intersezione di questo coi due sottogruppi ciclici di indice due; il secondo è invece somma di tre sottogruppi di indice due di cui uno ciclico

e due quadrimoni e quindi esso può pensarsi, in due modi diversi, come somma di quattro sottogruppi, a seconda che l'uno o l'altro dei due gruppi quadrimoni si pensi a sua volta come somma di tre sottogruppi. Quanto al terzo, poichè gli elementi di esso hanno tutti periodo due e sono a due a due permutabili, esso può, ed in sei modi diversi, pensarsi come somma di tre sottogruppi, tutti quadrimoni; potendo poi ognuno di questi pensarsi a sua volta come somma di tre sottogruppi, il gruppo stesso può, in 48 modi diversi considerarsi come somma di quattro sottogruppi.

5. Passiamo ora ad esaminare il caso in cui è $i_1 = 3$.

Per $i_1 = 3$, la (7) fornisce ancora la (11) e, di conseguenza, sussistono ancora le (12). Ne segue, qualunque siano h e k :

$$i_{h,k} = i = 9 \quad ; \quad i^{(k)} = 3 \quad ; \quad i^{(h,k)} = 1$$

onde i G_k hanno tutti indice tre ed i sottogruppi $G_h \wedge G_k$ coincidono tutti con l'intersezione comune J che ha indice nove in G ed indice tre in ogni G_k .

È evidente poi che:

VII — I G_k sono sottogruppi massimi ed hanno quindi, a due a due, per unione G .

Inoltre:

VIII — Condizione necessaria e sufficiente perchè J sia normale in G è che siano normali tutti i sottogruppi G_k .

Che la condizione sia sufficiente è evidente. Per dimostrarne la necessità supponiamo che J sia normale in G . Se il sottogruppo G_k non fosse normale in G esso possederebbe tre coniugati: G_k, G_k', G_k'' ; posto:

$$(15) \quad G_k \wedge G_k' \wedge G_k'' = J_k.$$

i G_k, G_k', G_k'' si intersecherebbero, a due a due, secondo il sottogruppo J_k , normale in G e di indice due in G_k , cioè di indice sei in G . Ora, poichè J è normale in G , J dovrebbe essere contenuto in tutti i coniugati di G_k e quindi anche in J_k , ciò che è assurdo dati i valori degli indici di J e J_k in G_k .

La VIII è dunque dimostrata. Se ne deduce subito che:

IX — Se uno dei quattro sottogruppi G_k è normale in G , tali riescono anche gli altri tre.

Invero se ad es. G_1 è normale in G , l'intersezione $J = G_1 \wedge G_2 = G_1 \wedge G_3$ è normale sia in G_2 che in G_3 e quindi, in virtù della VII, J è normale in G onde la IX discende dalla VIII.

Mostriamo ora che:

X — Se i quattro sottogruppi G_k non sono normali in G , i quattro

sottogruppi J_k , definiti dalla (15), normali e di indice sei in G , si intersecano a due a due, in uno stesso sottogruppo K normale in G .

Invero $J_1 \wedge J_2$ è contenuto sia in G_1 che in G_2 , dunque è contenuto in J e, di conseguenza, in G_3 ed in G_4 ; ma $J_1 \wedge J_2$ è normale in G e pertanto esso è contenuto in tutti i coniugati di G_3 ed in tutti i coniugati di G_4 , cioè in J_3 ed in J_4 . Ne segue:

$$J_1 \wedge J_2 \leq J_3 \wedge J_4.$$

In modo analogo si prova essere:

$$J_1 \wedge J_3 \geq J_2 \wedge J_4,$$

donde:

$$J_1 \wedge J_3 = J_2 \wedge J_4.$$

Posto dunque:

$$J_h \wedge J_k = K, \quad (h \neq k)$$

K è ovviamente normale in G .

XI — L'intersezione comune K dei sottogruppi J_k ha indice 18 in G e coincide coi quattro sottogruppi $J \wedge J_k$.

Cominciamo con l'osservare che, avendosi:

$$K = (J \wedge J_1) \wedge (J \wedge J_2),$$

e poichè $J \wedge J_1$ e $J \wedge J_2$ hanno entrambi indice due in J , l'indice di K in ognuno di essi è due od uno e, poichè J ha indice nove in G , l'indice χ di K in G non può essere che 18 o 36. Se è $\chi = 18$, il sottogruppo K , che ha indice due in J , coincide con i sottogruppi $J \wedge J_k$ che hanno anch'essi indice due in J e contengono debolmente K . Se è $\chi = 36$, K è contenuto in ognuno dei sottogruppi $J \wedge J_k$ e non coincide con alcuno di essi.

Per dimostrare la XI basta dunque far vedere che la circostanza $\chi = 36$ non può presentarsi. Invero, se fosse $\chi = 36$, il gruppo fattoriale G/K sarebbe un gruppo di ordine 36: Γ_{36} . Tale gruppo, in forza dell'omomorfismo intercedente tra esso e G dovrebbe a sua volta risultare somma di quattro sottogruppi $\Gamma_{12}^{(k)}$ di indice tre, cioè di ordine dodici, intersecantisi, a due a due, secondo un unico sottogruppo Γ_4 di indice nove, cioè di ordine quattro, non normale in Γ_{36} . Ognuno dei quattro sottogruppi $\Gamma_{12}^{(k)}$ dovrebbe inoltre contenere un sottogruppo normale $\Gamma_6^{(k)}$ di indice sei in Γ_{36} , cioè di indice due in $\Gamma_{12}^{(k)}$, ed a loro volta i quattro sottogruppi $\Gamma_6^{(k)}$ dovrebbero intersecarsi, a

due a due, nel sottogruppo identico E , mentre le loro intersezioni con Γ_4 dovrebbero essere dei sottogruppi del secondo ordine. Dovrebbe dunque aversi:

$$\Gamma_6^{(k)} \wedge \Gamma_4 = (1, g_k),$$

con g_k elemento di periodo due. Ora il sottogruppo del quarto ordine Γ_4 non può essere che ciclico o quadrimio. Se Γ_4 fosse ciclico esso conterrebbe un solo elemento di periodo due onde i sottogruppi $(1, g_k)$ dovrebbero ridursi ad uno solo nel qual caso i $\Gamma_6^{(k)}$ avrebbero, a due a due, in comune un sottogruppo del secondo ordine, contro l'ipotesi che essi si intersechino nel sottogruppo identico. Supponiamo allora che Γ_4 sia un gruppo quadrimio; Γ_4 possiede solo tre sottogruppi di ordine due e quindi almeno due delle intersezioni $\Gamma_6^{(k)} \wedge \Gamma_4$ devono coincidere in uno stesso sottogruppo di Γ_4 generato da un elemento di periodo due; tale sottogruppo essendo normale in Γ_{36} è poi contenuto in tutti i $\Gamma_6^{(k)}$, contro l'ipotesi che questi abbiano a comune il solo sottogruppo identico.

Resta così escluso il caso $\chi = 36$, e la XI è dimostrata.

Dalla XI si deduce poi facilmente che:

XII — *L' unione di due dei quattro sottogruppi J_k è sempre un sottogruppo proprio, normale e di indice due in G .*

6. Continuando l'analisi, iniziata al numero precedente, del caso $i_1 = 3$, supponiamo anzitutto che i quattro sottogruppi G_k , di indice tre, siano normali in G . L'intersezione comune J è normale ed ha indice nove in G , onde il gruppo fattoriale G/J è di ordine nove ed a sua volta può pensarsi come somma di quattro sottogruppi normali di ordine tre. Tale gruppo che, possedendo quattro sottogruppi di ordine tre, non è ciclico, è dunque il gruppo non ciclico abeliano di ordine nove.

Supponiamo ora che i G_k non siano normali. Il gruppo G contiene il sottogruppo normale K di indice 18 il quale è contenuto in ciascuno dei G_k onde il gruppo fattoriale G/K è un gruppo Γ_{18} di ordine 18 che può pensarsi come somma di quattro sottogruppi G_k/K ($k = 1, 2, 3, 4$) di indice tre non normali in Γ_{18} ed aventi, a due a due, per intersezione uno stesso sottogruppo di ordine due non normale in Γ_{18} . Per caratterizzare tale gruppo osserviamo che esso contiene certamente, per il teorema di SYLOW, un sottogruppo normale Γ_9 di indice due, sottogruppo che non può essere ciclico. Invero, detti $\Gamma_6^{(k)}$ i quattro sottogruppi di indice tre di cui Γ_{18} è somma, è:

$$\Gamma_9 \wedge \Gamma_6^{(k)} = \Gamma_3^{(k)}$$

onde i $\Gamma_3^{(k)}$ sono quattro sottogruppi ciclici, di ordine tre, necessariamente distinti. Γ_9 contiene dunque i quattro sottogruppi $\Gamma_3^{(k)}$ e quindi è un gruppo

di ordine nove non ciclico. Γ_9 ha dunque i generatori:

$$(16) \quad g_1^3 = g_2^3 = 1 \quad ; \quad g_1 g_2 = g_2 g_1.$$

Il gruppo Γ_{18} si ottiene ovviamente dal Γ_9 ampliando questo con un elemento g_3 di periodo due. Per trovare i generatori di Γ_{18} osserviamo in primo luogo che se Γ_{18} fosse abeliano il sottogruppo del secondo ordine generato da g_3 sarebbe normale in Γ_{18} e pertanto sarebbe l'unico sottogruppo di ordine due di Γ_{18} , in base al teorema di SYLOW; esso dovrebbe quindi coincidere con l'intersezione comune dei $\Gamma_6^{(k)}$ che non è normale in Γ_{18} . Γ_{18} non può dunque essere abeliano. L'elemento g_3 deve pertanto trasformare o ognuno degli elementi g_1 e g_2 nel proprio quadrato, o uno di essi in se e l'altro nel suo quadrato.

Osserviamo ora che ogni sottogruppo Γ_3 di ordine tre di Γ_{18} deve essere normale in Γ_9 , e nello stesso tempo deve essere contenuto in un sottogruppo $\Gamma_6^{(k)}$ d'ordine sei e, quindi, per il teorema di SYLOW, normale in esso, onde Γ_3 deve essere normale in $\Gamma_9 \vee \Gamma_6^{(k)} = \Gamma_{18}$.

Supponiamo ad es. che g_3 trasformi g_1 in se e g_2 nel suo quadrato cioè che sia:

$$(17) \quad g_1 g_3 = g_1 g_3, \quad g_2 g_3 = g_2 g_2^2 \quad ; \quad g_3^2 = 1.$$

Nel gruppo di ordine 18 che ha i generatori (16) e (17), il sottogruppo di ordine tre generato dall'elemento $g_1 g_3$ non è normale, in quanto tale elemento non è trasformato da g_3 nè in se nè nel proprio quadrato, avendosi:

$$g_3^{-1} (g_1 g_3) g_3 = g_1 g_2^2.$$

Pertanto è da escludersi che Γ_{18} sia generato da g_1, g_2, g_3 con le relazioni (16) e (17).

Supponiamo infine che g_3 trasformi g_1 e g_2 nei corrispondenti quadrati, cioè che sia:

$$(18) \quad g_1 g_3 = g_1^2 g_1^2 \quad ; \quad g_2 g_3 = g_2^2 g_2^2 \quad ; \quad g_3^2 = 1.$$

Ciò implica che g_3 trasformi gli elementi $g_1 g_1$ e $g_2^2 g_2$ nei propri quadrati $g_1^2 g_1^2$ e $g_2^2 g_2^2$. Il gruppo di ordine 18 che così si genera contiene effettivamente quattro sottogruppi di ordine sei intersecantisi a due a due, nel sottogruppo $(1, g_3)$ e contenenti ognuno uno dei quattro sottogruppi normali del terzo ordine generati dagli elementi $g_1, g_2, g_1 g_2, g_1^2 g_2$ che sono proprio i sottogruppi che compongono il sottogruppo normale Γ_9 . Il gruppo di ordine 18 così ottenuto è, evidentemente, l'unico avente struttura siffatta, ed è quindi proprio il gruppo fattoriale G/K che volevamo caratterizzare.

7. I ragionamenti dei numeri precedenti ci hanno permesso di determinare delle condizioni sufficienti perchè un gruppo finito sia somma di quattro suoi sottogruppi propri, portandoci a riconoscere che se un gruppo G gode di tale proprietà esso contiene un sottogruppo normale tale che il corrispondente gruppo fattoriale rientra in uno dei tipi in tali numeri menzionati.

Tali ragionamenti sono però facilmente invertibili in quanto se un gruppo finito G contiene un sottogruppo normale N il cui corrispondente gruppo fattoriale sia di uno dei tipi precedentemente discriminati, l'omomorfismo che si stabilisce tra G e G/N facendo corrispondere ogni elemento di G al laterale di N cui esso appartiene permette subito di riconoscere che G è somma di quattro sottogruppi.

È opportuno allora osservare che il gruppo Γ_{18} , definito nel numero precedente, contiene i quattro sottogruppi normali $\Gamma_3^{(k)}$ di indice sei i cui corrispondenti gruppi fattoriali $\Gamma_{18}/\Gamma_3^{(k)}$ sono isomorfi al gruppo non ciclico di ordine sei. Il gruppo Γ_{18} può dunque pensarsi sia come somma di quattro sottogruppi di indice tre, sia, per quanto si è visto al principio del numero 4, (in quattro modi diversi) come somma di quattro sottogruppi di cui uno di indice due e tre di indice tre.

I precedenti risultati possono compendiarsi nel

TEOREMA: « Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia somma di quattro sottogruppi è che esso contenga un sottogruppo normale N tale che il corrispondente gruppo fattoriale G/N rientri in uno dei tipi seguenti :

α_1) di ordine sei, non ciclico.

α_2) di ordine otto, abeliano $(1, 2)$, abeliano $(1, 1, 1)$ o diedrico.

α_3) di ordine nove, non ciclico.

α_4) di ordine diciotto coi generatori :

$$g_1^3 = g_2^3 = g_3^3 = 1 \quad ; \quad g_1 g_2 = g_2 g_1$$

$$g_1 g_3 = g_3 g_1^2 \quad ; \quad g_2 g_3 = g_3 g_2^2.$$

Nell'omomorfismo intercedente tra G e G/N , i quattro sottogruppi di cui G è somma hanno per corrispondenti, in G/N , i quattro sottogruppi che esauriscono G/N .

Nota del socio ordinario Carlo Miranda

(Adunanza del dì 3 marzo 1951)

Sunto. — Si dimostra che una funzione armonica di n variabili, hölderiana con esponente μ in un dominio sufficientemente regolare, ammette derivate parziali prime di potenza p -esima sommabile con $p < 1/(1 - \mu)$.

In uno spazio euclideo ad n dimensioni S_n consideriamo un dominio limitato T , la cui frontiera FT sia costituita da una o più ipersuperficie (prive di punti comuni), dotate in ogni punto di iperpiano tangente; diremo che T è di classe 2 se:

Esiste un numero τ tale che, qualunque sia il punto x di FT , la porzione $F(x)$ di FT contenuta nell'ipersfera $\Gamma(x, \tau)$ di centro x e raggio τ appartenga a uno solo dei contorni di T e, rispetto a un sistema di assi ortogonali $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ con l'origine in x e l'asse ξ_n coincidente con la normale esterna a FT , sia suscettibile di una rappresentazione del tipo

$$\xi_n = \zeta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}),$$

con ζ funzione definita e continua nel dominio connesso $A(x)$ proiezione di $F(x)$ sull'iperpiano $\xi_n = 0$, ivi dotata di derivate prime e seconde continue, queste ultime limitate superiormente in modulo da un numero Z indipendente da x .

Scopo di questa nota è di dimostrare il seguente teorema:

I. Le derivate parziali prime di una funzione $u(x)$ hölderiana con esponente μ in un dominio T di classe 2 e armonica in $T - FT$ sono funzioni di potenza p -esima sommabile per ogni p positivo e minore di $1/(1 - \mu)$. Inoltre per ogni coppia di numeri positivi $\mu [< 1]$ e $p [< 1/(1 - \mu)]$ si può determinare un numero M , tale da risultare:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \int_{T \cap \Gamma(x, \rho)} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \right|^p dy \leq M [|u|_\mu]^p \rho^{n-p(1-\mu)},$$

dove $|u|_\mu$ è il minimo coefficiente di HÖLDER della u e $\Gamma(x, \rho)$ è un'arbitraria ipersfera di centro x e raggio ρ .

In particolare:

II. Ogni funzione hölderiana con esponente $\mu > 1/2$ in un dominio T di classe 2 e armonica in $T - FT$ ha integrale di DIRICHLET finito su T .

Ovviamente per dimostrare il teorema I, di cui il teorema II è un imme-

diato corollario, basta stabilire che la (1) vale per ρ abbastanza piccolo e con riferimento a un particolare sistema di assi cartesiani.

Per questo cominciamo con l'asservare che, se $u(x)$ è una funzione continua nell'ipersfera $\Gamma(x_0, R)$ e armonica in $\Gamma - F\Gamma$, si ha in $\Gamma - F\Gamma$

$$u(x) = \frac{1}{R\sigma_n} \int_{F\Gamma} u(y) \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} d\sigma(y),$$

dove si è posto: $\rho = \overline{xx_0}$, $r = \overline{xy}$ e si è indicato con $d\sigma(y)$ l'elemento di misura ipersuperficiale di $F\Gamma$ nel punto y e con σ_n la misura ipersuperficiale dell'ipersuperficie sferica di raggio uno. Ne segue, indicando con x_i e y_i le coordinate rispettivamente di x e y :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{x=x_0} = \frac{n}{\sigma_n R^{n+1}} \int_{F\Gamma} u(y) y_i d\sigma(y) = \frac{n}{\sigma_n R^{n+1}} \int_{F\Gamma} [u(y) - u(x_0)] y_i d\sigma(y).$$

Se la u verifica la condizione di HÖLDER

$$|u(x') - u(x'')| \leq |u|_\mu \overline{x'x''}^\mu,$$

si ha in definitiva

$$(2) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} \leq \frac{n |u|_\mu}{R^{1-\mu}}.$$

Ritornando ora a considerare un dominio T di classe 2, osserviamo che per esso è possibile determinare due numeri δ ed H tali che:

a) Per ogni punto x di S_n che abbia da FT distanza non superiore a 2δ esiste uno e un sol punto x' di FT tale che l'ipersfera $\Gamma(x, \overline{xx'})$ abbia in comune con FT il solo punto x' .

b) L'ipersfera, dell'iperpiano tangente a FT in x' , di centro x' e raggio δ sia interamente contenuta in $A(x')$.

c) Per ogni punto y di T appartenente a un'ipersfera di raggio δ , il cui centro x abbia da FT distanza non superiore a δ , riesca:

$$(3) \quad \frac{1}{yy'} \leq \frac{H}{yy''},$$

essendo y' il punto di FT che ha minima distanza da y , e y'' il punto di FT che ha la stessa proiezione ortogonale di y nell'iperpiano tangente a FT nel punto x' .

Dopo ciò, se x è un punto che abbia da FT distanza non superiore a δ e se $\rho \leq \delta$, il dominio $T \cap \Gamma(x, \rho)$, supposto non vuoto, risulta normale rispetto all'iperpiano tangente a FT in x' e cioè definito, rispetto al sistema

di assi ξ con l'origine in x' , dalle limitazioni

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \leq \xi_n \leq \beta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \\ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \subset C,$$

essendo C la proiezione di $T \cdot \Gamma(x, \rho)$ sull'iperpiano $\xi_n = 0$, e

$$\alpha = -\overline{xx'} - \sqrt{\rho^2 - (\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)} \\ \beta = \min \{ \xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}); -\overline{xx'} + \sqrt{\rho^2 - (\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)} \}.$$

Da qui e dalla (3) segue che per ogni punto $y \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n)$ di $T \cdot \Gamma(x, \rho)$ è:

$$\frac{1}{yy'} \leq \frac{H}{\beta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) - \xi_n}.$$

Per ogni funzione u armonica in $FT - T$ e hölderiana in T si ha pertanto in detto punto y , tenendo conto della (2):

$$\left| \frac{\partial u(y)}{\partial \xi_i} \right| \leq \frac{n H |u|_p}{(\beta - \xi_n)^{1-\mu}}$$

e quindi, se $p(1-\mu) < 1$:

$$\sum_{i=1}^n \int_{T \cdot \Gamma(x, \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right|^p dy \leq n(nH)^p (|u|_\mu)^p \int_C d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \int_\alpha^\beta \frac{d\xi_n}{(\beta - \xi_n)^{p(1-\mu)}} \\ = \frac{n(nH)^p}{1-p(1-\mu)} (|u|_\mu)^p \int_C (\beta - \alpha)^{1-p(1-\mu)} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \\ \leq \frac{n(nH)^p}{1-p(1-\mu)} (|u|_\mu)^p (2\rho)^{1-p(1-\mu)} \text{ mis } C$$

e di qui segue la (1) tenendo conto che

$$\text{mis } C \leq \frac{\sigma_{n-1}}{n-1} \rho^{n-1}.$$

D'altra parte, se x appartiene a T ed ha da FT distanza maggiore di δ si ha per $\rho \leq \delta/2$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma(x, \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right|^p dy \leq \frac{\sigma_n (nH)^p 2^{p(1-\mu)}}{\delta^{p(1-\mu)}} (|u|_\mu)^p \rho^n$$

e resta perciò dimostrato che una limitazione del tipo (1) vale per ogni ipersfera di raggio non superiore a $\delta/2$ che abbia punti in comune con T . Di qui, come si è premesso, il teorema.

CONTRIBUTO SPERIMENTALE ALLO STUDIO DELL'EFFLUSSO
DA TUBI ADDIZIONALI CILINDRICI

Nota del dr. Andrea Russo Spena, presentata dal socio corr. G. Ippolito

(Adunanza del dì 7 aprile 1951)

Sunto. — Dopo breve ricapitolo dei risultati sperimentali finora acquisiti, si descrivono i fenomeni osservati in tubi addizionali di vetro di diversa lunghezza, al variare del carico.

Si riportano attraverso diagrammi i risultati delle esperienze tendenti a chiarire l'influenza esercitata dal carico e dalla lunghezza del tubo sul coefficiente di efflusso, sulla distribuzione delle velocità e delle pressioni in punti interni della corrente ed in particolare sull'andamento delle pressioni in asse e alla parete dei tubi.

Dalla discussione dei risultati sperimentali restano chiariti tra l'altro: il processo di movimento nel tratto di tubo addizionale prossimo all'imbocco (contrazione e successiva espansione della corrente); la legge con cui nelle successive sezioni trasversali del tubo diminuisce la energia totale specifica media di trasporto della corrente; le modalità con cui la turbolenza si diffonde nel getto ed infine quelle con cui si manifestano i fenomeni di cavitazione.

1. *Premessa.*

Fino a poco più di un decennio fa, il processo di efflusso a pieno sbocco da tubi addizionali è stato studiato partendo dal presupposto che a valle dell'imbocco il processo di contrazione della corrente si svolga in modo perfettamente identico a quello di getti liberi da luci scolpite, indipendentemente dalla presenza della parete, sì che si possa senz'altro ammettere l'esistenza di una *sezione contratta* col significato consueto in foronomia.

Assumendo in base alle esperienze di VENTURI [1] che nella sezione contratta regni una depressione costante e pari a $3/4 \gamma h$, si perviene al valore $\mu = 0,82$ del coefficiente di efflusso.

Poiché a conferma stava la concordanza di detto valore di μ con quelli dedotti sperimentalmente da VENTURI e successivamente da altri Autori [2] relativi a diametri diversi ma a valori sempre molto limitati del carico, in genere minori di m. 3, veniva accettata, quasi come postulato, la conclusione che nella sezione contratta la depressione fosse costante e pari a $3/4 \gamma h$ ¹⁾.

¹⁾ Per citare un autore che più esplicitamente si esprime su tale punto, MASONI osserva: « Bisogna mettere molta cura negli esperimenti per riuscire a realizzare una colonna d'acqua, nel tubo di cristallo dove si forma l'aspirazione, la cui altezza corrisponde mediamente, nel sito della sezione contratta, a $3/4 H$. Per

Fra le poche ricerche sistematiche sono da annoverarsi quelle di CAPITÒ [3], dirette a stabilire la legge con cui il coefficiente di efflusso diminuisce al crescere della lunghezza del tubo oltre i 5 diametri; quelle di HARRIS [4] dirette invece a determinare la dipendenza di μ dalla lunghezza

del tubo, minore di 3 diametri, quelle di PARDOE [5] e di ANGUS [6].

PARDOE sperimentando su un tubo addizionale di diametro ~ 5 cm e lungo 3 diametri precisò per la prima volta:

Fig. 1 — Coefficiente di efflusso in funzione del carico (risultati sperimentali di Pardoe).

carico di m 10, decresce successivamente fino al carico massimo sperimentato di $\sim m$ 14,50 (fig. 1);

2°. che per carico fino a 9 m le pressioni lungo una generatrice del tubo variano notevolmente da punto a punto nel primo tratto di tubo; presentano un minimo a $0,25 D$ dall'imbocco (fig. 2, curva P), raggiungono infine un valore praticamente costante e pari alla pressione atmosferica nel tratto a valle della sezione distante $2 D$ dall'imbocco.

ANGUS trovò invece (fig. 2, curva A) che la depressione lungo la parete, nel primo tratto di tubo prossimo all'imbocco, è praticamente costante e pari a $0,73 \gamma h$.

A confermare i risultati delle esperienze di PARDOE ed a completare le indagini, stanno le recenti ricerche di GENTILINI [7] condotte su tubi addizionali di diametro $D=4,09$; $6,00$; $7,98$ cm e lunghi ciascuno $3 D$, sotto carichi variabili da $0,40$ a $5,60$ m I risultati di dette esperienze sono riportati in figura 2 e 3.

$P/\gamma h$

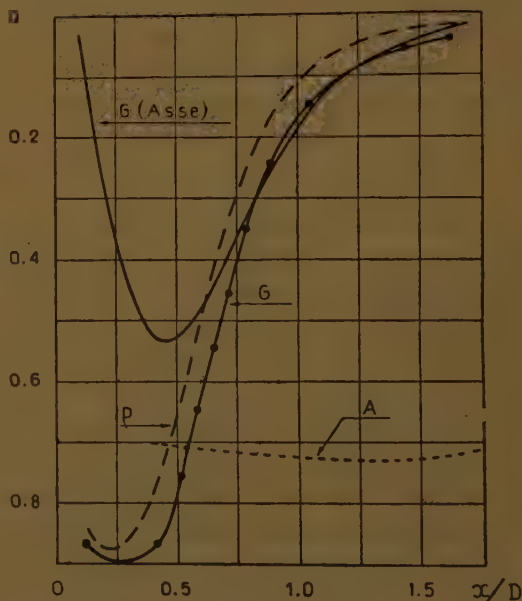


Fig. 2 — Depressioni in asse e alla parete (confronto tra i risultati sperimentali raccolti da Gentilini (G.), Pardoe (P.) e Angus (A.).

poco che si variano le condizioni dell'esperimento, si hanno colonne d'acqua di altezze diverse, le quali, come mostreremo, non corrispondono alla vera altezza di aspirazione.

GENTILINI così conclude:

a) il coefficiente di efflusso (fig. 3), indipendente dal carico, ma variabile con D , decresce al crescere di questo, analogamente a quanto si verifica, con carico costante, nelle luci in parete sottile;

b) le depressioni lungo una generatrice, nel caso quella superiore, del tubo addizionale variano notevolmente da punto a punto nel tratto iniziale (fig. 2, curva G), presentando un massimo pari a $0,90 \gamma h$ a circa $0,3 D$ dall'imbocco;

c) le depressioni lungo l'asse [fig. 2, curva G (asse)], variano notevolmente da punto a punto presentando un massimo pari a $0,54 \gamma h$ a $0,45 D$

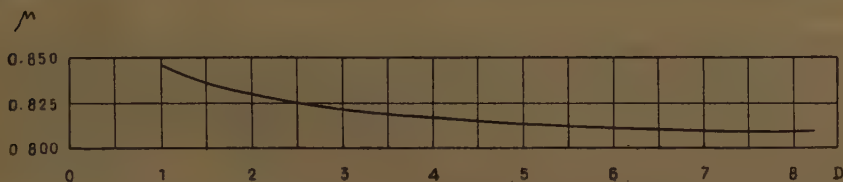


Fig. 3 — Coefficiente di efflusso in funzione del diametro in cm. (elaborazione di Gentilini).

dall'imbocco, cioè a valle della sezione di massima depressione riscontrata alla parete;

d) l'andamento dei diagrammi delle depressioni, in asse e alla parete, esclude che la vena nell'interno del tubo presenti una sezione trasversale con distribuzione uniforme (o idrostatica) delle pressioni, come presuppone la trattazione tradizionale del processo;

e) il valore del coefficiente di efflusso fornito da tale trattazione ($\mu = 0,815$) rappresenta mediamente i risultati sperimentali.

Dagli studi fin qui esposti non risulta siano stati indagati: il processo di movimento nel tratto prossimo all'imbocco ed i fenomeni che hanno luogo per quei valori del carico per i quali le variazioni del coefficiente di efflusso indicate dalle esperienze di PARDOE ed i valori delle depressioni misurate da GENTILINI portano a prevedere l'insorgere di fenomeni di cavitazione.

Nella convinzione che le esperienze dirette allo studio di questi fenomeni hanno particolare interesse applicativo, ho intrapreso la ricerca di cui è oggetto la presente nota.

Dall'insieme dei risultati sperimentali, da me raccolti, risulterà chiarito, tra l'altro, il modo con cui nelle successive sezioni trasversali della corrente diminuisce l'energia totale media di trasporto della corrente; come la turbolenza si va diffondendo nel getto ed infine le modalità con cui si manifestano i fenomeni di cavitazione.

I risultati raggiunti si ricollegano alle esperienze di THOMAS [8] e Mc NOWN [9] sulle modalità con cui, dipendentemente dalla forma dell'im-

bocco, si estrinsecano i fenomeni di cavitazione, e a quelle di KALINSKE [10] per quanto si riferisce al meccanismo di dissipazione di energia nelle correnti in espansione.

2. Esperienze preliminari.

Le esperienze sono state condotte nel Laboratorio di Idraulica e Costruzioni Idrauliche di Napoli con installazione che sarà descritta nel prossimo paragrafo.

Per seguire lo svolgersi del fenomeno al variare del carico è stata condotta in via preliminare una serie di prove su tubi di vetro di lunghezza variabile da 5 diametri a 40 diametri e di diametro interno di 20 e di 30 mm.

Nei tubi di lunghezza 5 diametri sono stati osservati i seguenti fenomeni,

Fino a carichi dell'ordine di 8 m, la corrente occupa interamente il tubo e si presenta compatta e trasparente (fig. 4), diventa opaca solo dopo lo sbocco nell'aria. Nell'aria il getto presenta sul contorno esterno il caratteristico aspetto frastagliato descritto dai trattatisti ed in particolare da MASONI [2], ma si mantiene pressochè cilindrico. Se si inietta del liquido colorato al centro della vena, esso viene rapidamente allontanato; se lo si inietta, invece, in prossimità della parete a distanze non molto grandi dall'imbocco, ad es. mezzo diametro, esso permane per un intervallo sia pur breve di tempo. Questo dimostra, credo, che, presso le pareti, in corrispondenza delle sezioni indicate, il liquido non prende parte attiva al moto generale di trasporto.

Per carichi intorno ai 9 m cominciano a manifestarsi, accompagnati da rumore lacerante e da vibrazioni dell'apparecchiatura sperimentale, i primi fenomeni di cavitazione, analoghi a quelli descritti da THOMAS [8] e da SCHMIDT [11]: la corrente si presenta opaca nel tubo solo in un breve tratto prossimo all'imbocco (fig. 5), nella restante parte trasparente.

Al crescere del carico fino a 14 metri circa, si attenuano il rumore e le vibrazioni, il tubo è ancora occupato interamente dalla corrente, di colore bianco in un tratto immediatamente successivo all'imbocco (fig. 6), che va man mano allungandosi fin quasi a raggiungere lo sbocco sotto il carico di 14 m. circa. Nell'aria il getto si frange allargandosi notevolmente a forma di una sorta di cono (fig. 6 e 7) con angolo di apertura crescente col carico.

A carichi poco superiori ai m 12, in un primo tratto del tubo la corrente si distacca dalle pareti formando un getto libero cristallino circondato da un ambiente apparentemente privo di liquido, sì che sono visibili lungo la parete gocce di acqua sospinte verso l'imbocco (fig. 8); in prossimità dello sbocco il getto si allarga bruscamente fino a riprendere contatto con le pareti; ma la striscia più o meno larga di contatto è occupata da liquido bianco spumoso. Nell'aria il getto si frantuma quasi in minute gocce che vanno ad occupare un largo cono.



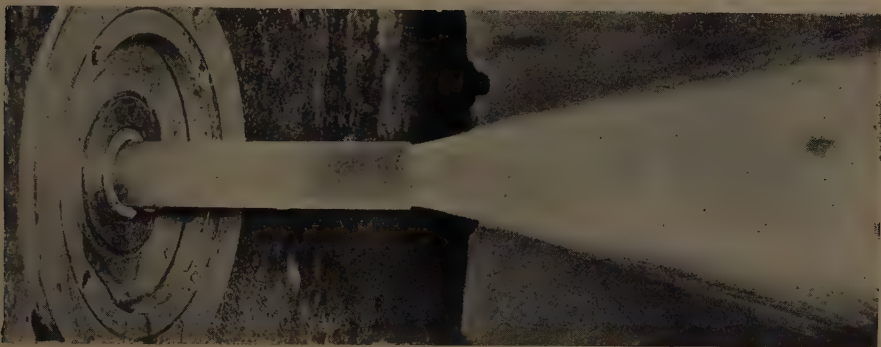
4



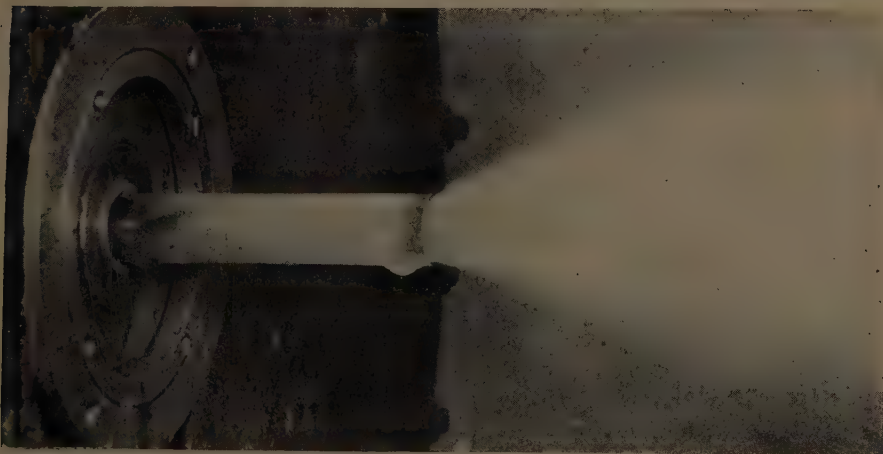
5



6



7



8

Figg. 4, 5, 6, 7, 8 — Fenomeni che si associano all'efflusso in tubi addizionali al crescere del carico
 $\left(\frac{L}{D}=5 ; h_0 \leq h \leq 15 \text{ m}\right)$



9



10



11



12



13a



13b

Figg. 9, 10, 11, 12, 13a e 13b — Fenomeni che si associano all'efflusso in tubi addizionali al crescere del carico ($\frac{L}{D} = 40$; $10 \leq h \leq 15$ m)

Al crescere ulteriore del carico la striscia di contatto si sposta fin quasi a ridosso della sezione di sbocco, finché il processo, ormai instabile, cambia completamente fisionomia con rapido passaggio da efflusso a pieno sbocco ad efflusso libero.

L'accennata instabilità del processo rende praticamente impossibile l'esatta determinazione del carico che segna il limite tra un tipo di efflusso e l'altro.

In genere l'efflusso a pieno sbocco è stabile fino a carichi poco superiori ai m 15.00, purchè a partire dai m. 10 circa l'aumento del carico venga attuato lentamente; può permanere fino a 16.00 m o poco più, solo quando oltre i 15.00 m, si proceda con molta cautela evitando che vengano aspirate anche minime quantità di aria ¹⁾ dall'esterno.

In quanto segue, per brevità di linguaggio chiamerò *carico di distacco* o *carico limite di distacco* quel valore del carico che segna il limite della condizione di permanenza dell'efflusso a pieno sbocco.

In tubi di lunghezza pari a 40 diametri circa, i fenomeni innanzi descritti non subiscono alterazioni apparenti finché il carico si mantiene inferiore ai m 12 circa.

La corrente, trasparente fino a carichi dell'ordine di 9 m (fig. 9), diviene successivamente opaca a partire dall'imbocco in tratti sempre più estesi (fig. 10) con l'intensificarsi dei fenomeni di cavitazione al crescere del carico.

La maggiore lunghezza del tubo praticamente non esercita alcuna influenza sulla entità dei rumori e delle vibrazioni avvertiti nei tubi di lunghezza minore; ma si nota un leggero aumento del carico che segna l'insorgere dei primi fenomeni di cavitazione.

Per carichi prossimi ai m. 11.50 circa, si attenuano il rumore e le vibrazioni, la corrente si distacca nettamente dal tubo (fig. 11) dando origine ad un getto libero che si espande verso valle fino a riprendere contatto con la parete in sezioni sempre più vicine allo sbocco (fig. 10, 11, 12, 13a e 13b al crescere del carico), con le stesse modalità descritte per i tubi di lunghezza pari a 5 diametri.

Si è avuto occasione di constatare che, se per errato montaggio l'asse del tubo non è esattamente normale alla sezione di imbocco, il getto urtando contro la parete del tubo si allarga bruscamente, dà origine ad un breve tronco di corrente di colore bianco come spuma ma torna subito a valle trasparente.

In prossimità dell'imbocco la zona attorno al getto appare vuota; poco a valle, nella parte inferiore del tubo, si accumula nel tempo uno straterello di acqua, apparentemente ferma, il cui spessore aumenta fino a lambire il

¹⁾ In alcune esperienze il passaggio da efflusso a pieno sbocco a quello libero è stato determinato dall'aspirazione simultanea dell'aria contenuta nelle canne di collegamento delle prese piezometriche alla parete con i manometri di misura.

contorno del getto; a tal punto esso viene trascinato via rapidamente dalla corrente per ricostituirsi successivamente. In questo strato d'acqua sono nettamente visibili particelle di vapore in continua agitazione.

Dalle esperienze su tubi addizionali di vetro è stato reso possibile rendersi conto dell'effetto di piccoli ostacoli, quali sottili aghi paralleli all'asse della corrente. Tali effetti si estrinsecano in azioni di disturbo particolar-

mente notevole ai carichi per i quali normalmente, a getto indisturbato, si manifestano i fenomeni di cavitazione.

Aghi non troppo sottili, ma soprattutto con punta non opportunamente sagomata, in prossimità della parete di un tubo di vetro di 30 mm. di diametro, provocano una modi-

fica delle condizioni di efflusso per cui la zona occupata da liquido bianco spumoso su descritta si sposta verso l'imbocco. Si ha addirittura una attenuazione sensibile dei fenomeni di cavitazione e della intensità del rumore e delle vibrazioni di cui ho detto sopra, quando l'ago è di diametro esterno 3 mm con punta controcorrente a forma di calotta sferica. Tali effetti non sono stati rilevati quando l'ago è disposto in asse al tubo e con estremo nell'interno dell'adduttore di cui dirò poco appresso.

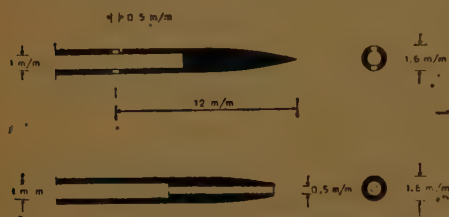


Fig. 14. — Particolari degli aghi piezometrico e pitometrico.

T A B E L L A I.

Diametro tubo addizionale in mm.	DIAMETRO ESTERNO DELL' AGO in mm.				
	P i e z o m e t r i c o			P i t o m e t r i c o	
	I n p u n t i			I n p u n t i	
	interni	in asse	prossimi alla par.	interni	prossimi alla par.
50.3	1.6	1.8	1	1.6	1
30.2	1.2	1.8	—	1.2	—

Fu pertanto condotta una serie di prove per stabilire la sagoma e i diametri degli aghi che furono impiegati nelle successive esperienze quantitative. Si scelsero così la sagoma delle punte degli aghi in acciaio inossidabile (fig. 14) destinati alla misura delle pressioni e delle velocità, e le dimensioni come dalla tabella I.

3. Installazione sperimentale.

L'installazione sperimentale fig. 15, segue molto da vicino gli schemi usati da ANGUS, PARDOE e recentemente da GENTILINI.

L'adduttore, cilindrico ad asse orizzontale di diametro interno 600 mm, lungo m. 2,00, fu collegato alla rete di circolazione ad alta pressione esistente nel laboratorio [12], tramite un diffusore.

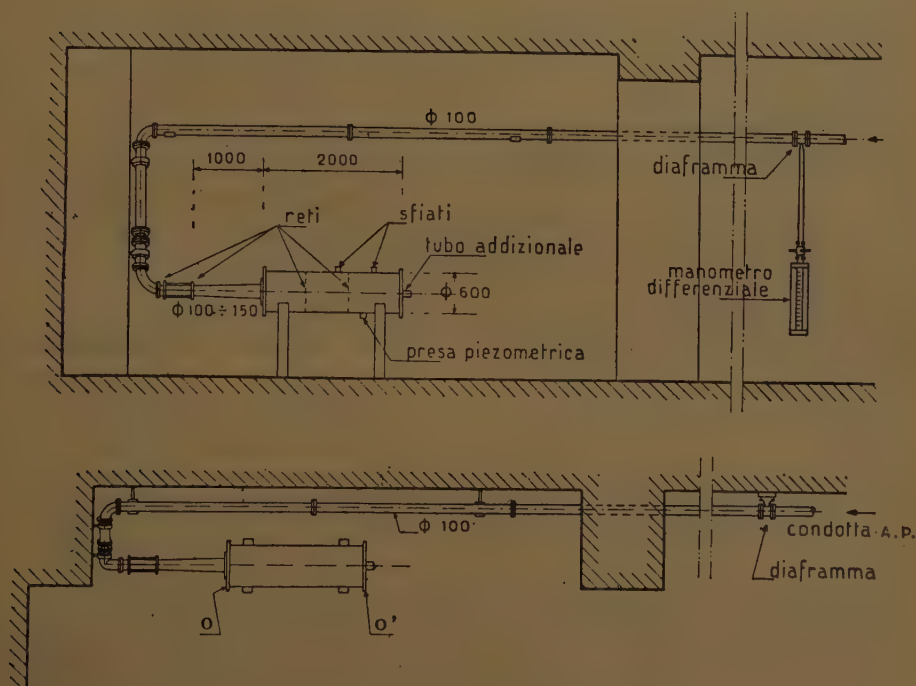


Fig. 15 — Installazione sperimentale.

Reti di calma sono state disposte sia nell'ultimo tratto della tubazione che nello adduttore, queste ultime mobili. In fig. 15 sono anche segnati sulla generatrice più alta dell'adduttore due rubinetti di sfiato, con cui all'inizio delle esperienze veniva allontanata l'aria dall'adduttore.

Il carico veniva misurato a mezzo di una presa piezometrica, lungo la generatrice più bassa, a m. 0,50 dallo sbocco; la portata a mezzo di un diaframma U. N. l. [13], visibile in (fig. 15a), e saltuariamente con misure volumetriche facendo uso della vasca tarata del laboratorio [13].

Per le esperienze qualitative mi sono avvalso, come ho detto, di tubi di vetro. Per le successive esperienze quantitative non ho potuto avvalermi

di essi sia perchè non perfettamente calibrati, sia perchè sarebbe stato oltremodo difficile eliminare le piccole imperfezioni nella zona di passaggio tra vetro e metallo che sostanzialmente si traducono in una alterazione dell'andamento delle depressioni lungo la parete, così come trovato da Rouse [14].

Sono stati pertanto impiegati tubi addizionali dello spessore di 9 mm, tutti con imbocco a spigolo vivo, ricavati da barre di bronzo trafilato forate

al tornio ed alesate nell'interno con una tolleranza di 0.05 mm dopo che erano stati aperti i fori da 0,5 mm delle prese piezometriche alla parete, realizzate con le modalità costruttive illustrate in fig. 16.

Per il rapido montaggio e smontaggio dei tubi addizionali sottoposti a prova, fu fissato sul disco O' di chiusura dell'adduttore, in asse allo stesso, una corona di bronzo con sede conica (fig. 16) contro la quale, a mezzo di ghiera, veniva serrata la piastra portatubi, ossia il disco sul quale era preventivamente montato il tubo da provare.

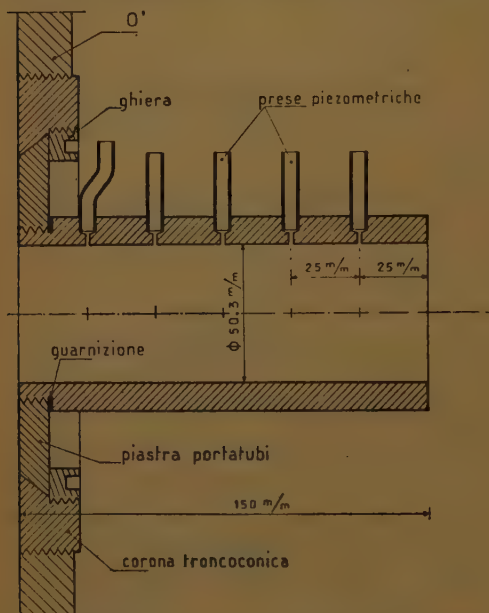


Fig. 16 — Sezione longitudinale di un tubo addizionale e posizione delle prese piezometriche alla parete.

Dati gli scopi della ricerca, occorre poter portare le punte degli aghi di misura in tutti i punti interni al tubo e stabilirne esattamente la posizione. La soluzione di tale problema è stata resa ardua dalla facilità con cui gli aghi usati, necessariamente lunghi e sottili, vibravano e si inflettevano sotto l'azione di correnti tanto veloci e nelle quali le variazioni di pressioni e di velocità in punti vicini sono notevoli.

Allo scopo ho dovuto escogitare i due tipi di apparecchi, funzionanti anche da coordinatometro, che si descrivono qui di seguito.

Un primo tipo usato per i rilievi di velocità e pressioni lungo diametri orizzontali e lontani dallo sbocco è quello (fig. 17) montato sulla piastra di sostegno $a b c d$ solidale al tubo.

L'ago, fissato all'asta S , scorre nell'interno del tubo, in un sottilissimo manicotto M di acciaio inossidabile. Col comando di un rocchetto di frizione a mezzo di un cavetto di rinvio di acciaio di 0,3 mm, teso da un tenditore, si imprimevano spostamenti eguali al manicotto M ed all'asta S mobile tra due guide parallele.

Le modalità con cui il cavetto attraversa lo spessore del tubo sono

rappresentate nel particolare di fig. 18; la tenuta è assicurata dai tappi di gomma in cui viene preventivamente infilato il cavetto.

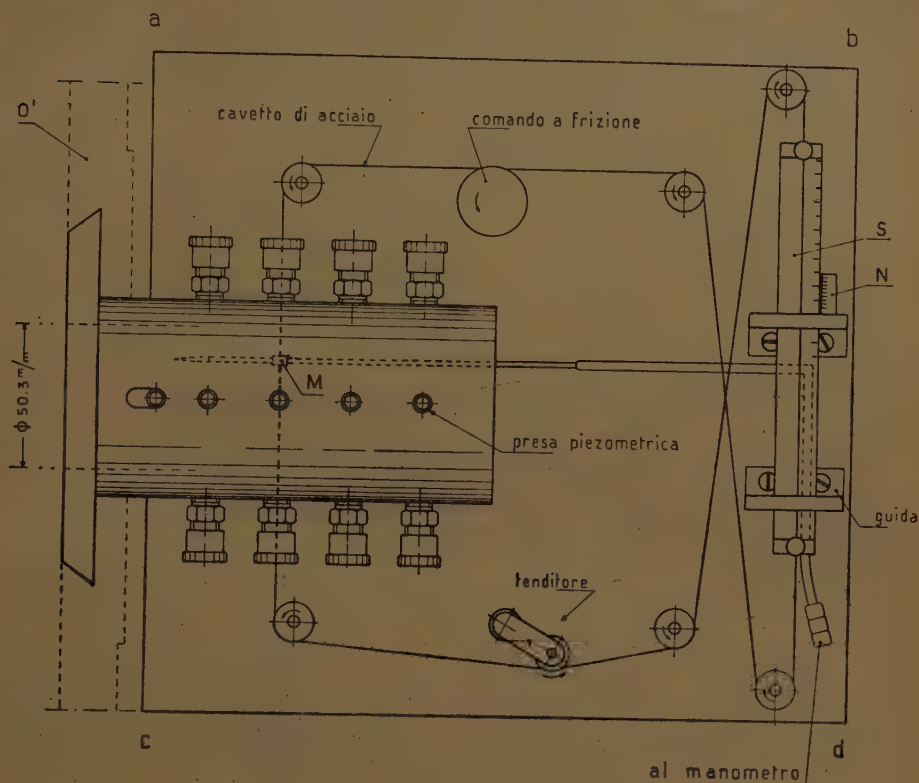


Fig. 17 — L. tipo di coordinatometro.

Gli attraversamenti furono disposti a distanza tale che, con sbalzo massimo di 45 mm e con i fori di presa dell'ago distanti almeno 15 mm dal manicotto, potessero essere raggiunti tutti i punti interni al tubo ad eccezione di quelli a meno di 1,5 mm dalla parete o relativi a sezioni distanti meno di 65 mm dallo sbocco.

La posizione dei fori stessi, rispetto all'asse del tubo, nel corso delle esperienze veniva letta al nonio *N* sulla scala metrica.

Per ogni sezione in cui ho proceduto ai rilievi è occorso variare la lunghezza dell'ago, verificare il parallelismo tra gli assi del tubo e dell'ago, misurare la distanza dei fori di presa dalla sezione di imbocco.

L'indagine, pertanto, è risultata particolarmente lunga e laboriosa

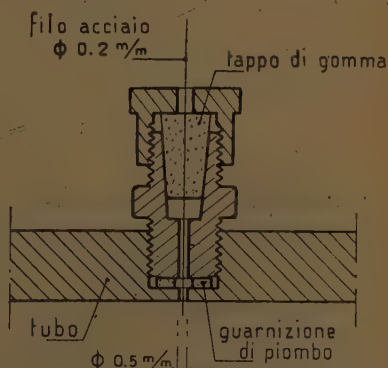


Fig. 18. — Particolare dell'attraversamento del cavetto d'acciaio.

L'altro coordinatometro guida, tipo tornio, usato per lo spostamento degli aghi di misura delle pressioni e delle velocità in punti su diametri orizzontali e prossimi allo sbocco, è rappresentato in fig. 19. Esso consta di una robusta piastra $a b c d$ che può scorrere lungo guide piane $g g - g' g'$

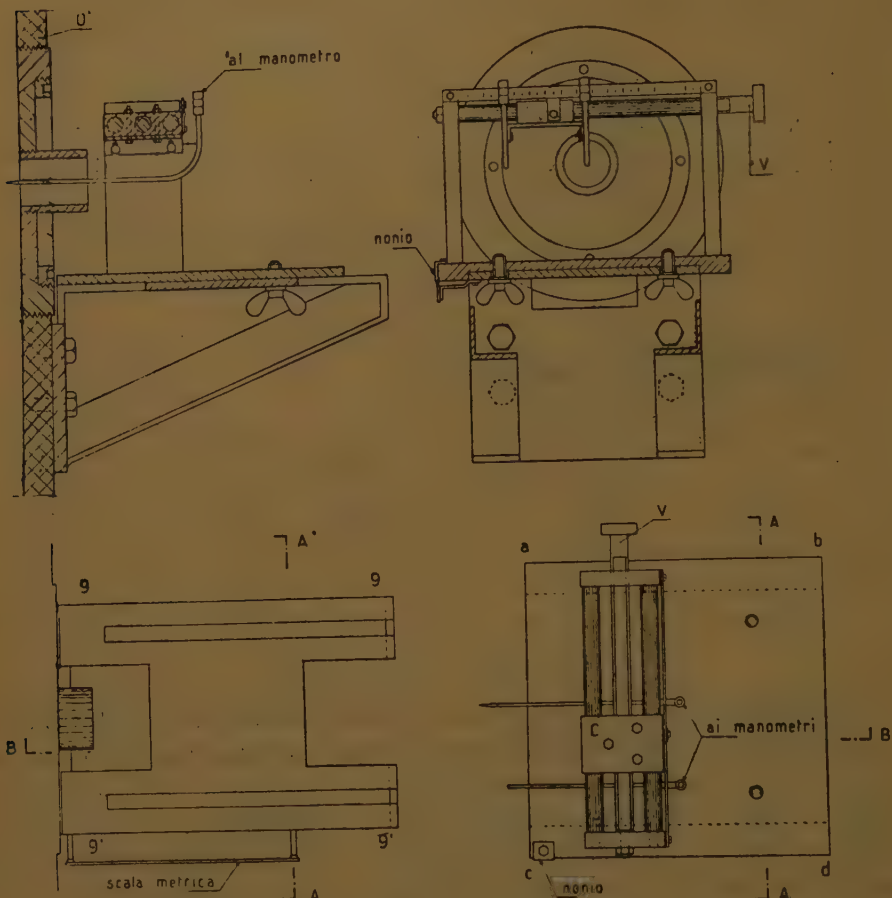


Fig. 19 — II. tipo di coordinatometro.

in direzione parallela all'asse del tubo addizionale. A detta piastra è fissato un ponticello sul quale scorre a sua volta un carrello C in direzione normale all'asse del tubo. Al carrello C , comandato dalla vite V , sono fissati contemporaneamente gli aghi piezometrico e pitometrico con gli assi paralleli all'asse del tubo. Prima di iniziare i rilievi venivano determinate esattamente sulle scale metriche, su cui si leggono gli spostamenti del carrello e della piastra, le coordinate delle prese: piezometrica e pitometrica disposte al centro della sezione di sbocco.

La necessità di avere pronti per l'impiego entrambi gli aghi è stata,

tra l'altro, imposta dalla circostanza che per carichi intorno ai m 14, con cui furono eseguite alcune esperienze, i caratteri del processo di efflusso variavano rapidamente col carico sì che si rendeva difficoltoso ristabilire il funzionamento con uno stesso carico o con altro poco diverso.

A completamento dell'apparecchiatura sperimentale furono predisposti manometri ad acqua od a mercurio, adottando di volta in volta l'uno o l'altro tipo di manometro, secondo che le pressioni statiche o dinamiche risultavano inferiori o superiori ai 3 metri.

4. Risultati sperimentali.

A) Coefficiente di efflusso.

A verifica dell'apparecchiatura sperimentale ed a controllo dei rilievi

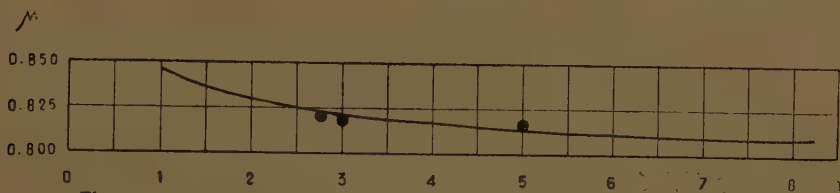


Fig. 20 — Coefficiente di efflusso in funzione del diametro in cm.: ($h < 10$ m.).

successivi ho valutato di volta in volta il coefficiente di efflusso dei tubi provati, sotto carichi variabili da 1 a 7 m in base alla nota formula:

$$(1) \quad Q = \mu \sigma \sqrt{2gh}$$

in cui al solito Q è la portata idrica, σ l'area della sezione trasversale del tubo ed h il carico.

Il materiale raccolto, benchè in parte non rivesta carattere di novità, non è privo di interesse in quanto completa ed arricchisce i dati esistenti.

Nelle figg. 20 e 21 sono posti a raffronto i risultati da me ottenuti su tubi di diametro 50.3 mm ed $L=3$; 2 e 1.5 D e su tubi con $D=30.2$ mm, $D=27.7$ mm, $L=3D$ (tutti sotto carichi compresi tra 1 e 7 m), con quelli indicati dalla curva $\mu(D)$ dedotta da GENTILINI (fig. 20) e dalla curva $\mu(L/D)$ riportata da HARRIS (fig. 21).

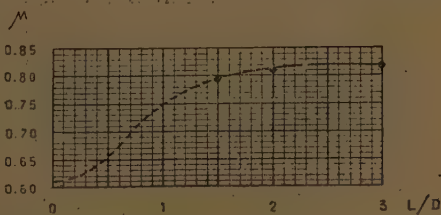
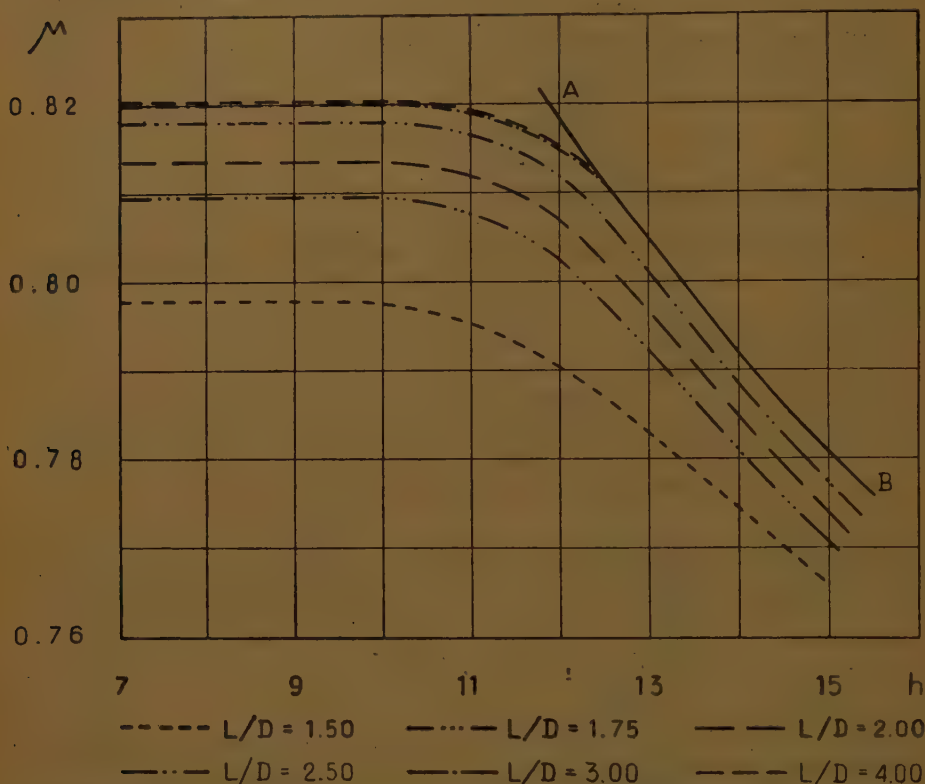


Fig. 21 — Coefficiente di efflusso in funzione della lunghezza del tubo ($h < 10$ m.).

Il coefficiente di efflusso, praticamente costante nell'intero campo indagato per ciascun tubo, varia in dipendenza dei rapporti $\frac{L}{D}$ e del valore

del diametro D , in pieno accordo con quanto trovato dai precedenti Autori. A parità di condizioni, gli scarti tra i coefficienti μ da me trovati e quelli già noti non raggiungono l'1%.

Sulla determinazione del coefficiente di efflusso per carichi superiori ai 7 m, per quanto mi risulta, non esistono altre esperienze oltre quella



già richiamata di PARDOE e relativa ad un tubo di 5 cm e lunghezza $3 D$.

Ho pertanto ritenuto opportuno estendere l'indagine deducendo i valori di μ per tubi di ottone trafilato, tutti di egual diametro: 27.7 mm e con imbocco a spigolo vivo ma di lunghezza variabile da 1.5 a 15 D per h che dai m 7 raggiunge il valore del carico di distacco. I risultati sono riportati nelle figg. 22 e 23.

Le curve rappresentatrici della funzione $\mu(h)$ per tubi con $\frac{L}{D} \leq 5$ spousano l'andamento della curva di PARDOE (fig. 1).

Per quanto riguarda il problema considerato da HARRIS e CAPITÒ, si può dire che il coefficiente di efflusso conserva, per ciascun tubo, almeno per carichi inferiori a m 10, un valore pressochè costante, in accordo con quanto sopra:

crebbe dapprima con $\frac{L}{D}$ da 1.5 a 4, fig. 22; diminuisce successivamente al crescere ulteriore di $\frac{L}{D}$ (fig. 23).

A carichi mediamente superiori ai m 10, μ decresce al crescere di h , (figg. 22 e 23), fino al carico di distacco.

È interessante, per quanto andrò a dire in seguito, far rilevare qui che nel corso delle esperienze non è stato possibile realizzare efflusso a pieno

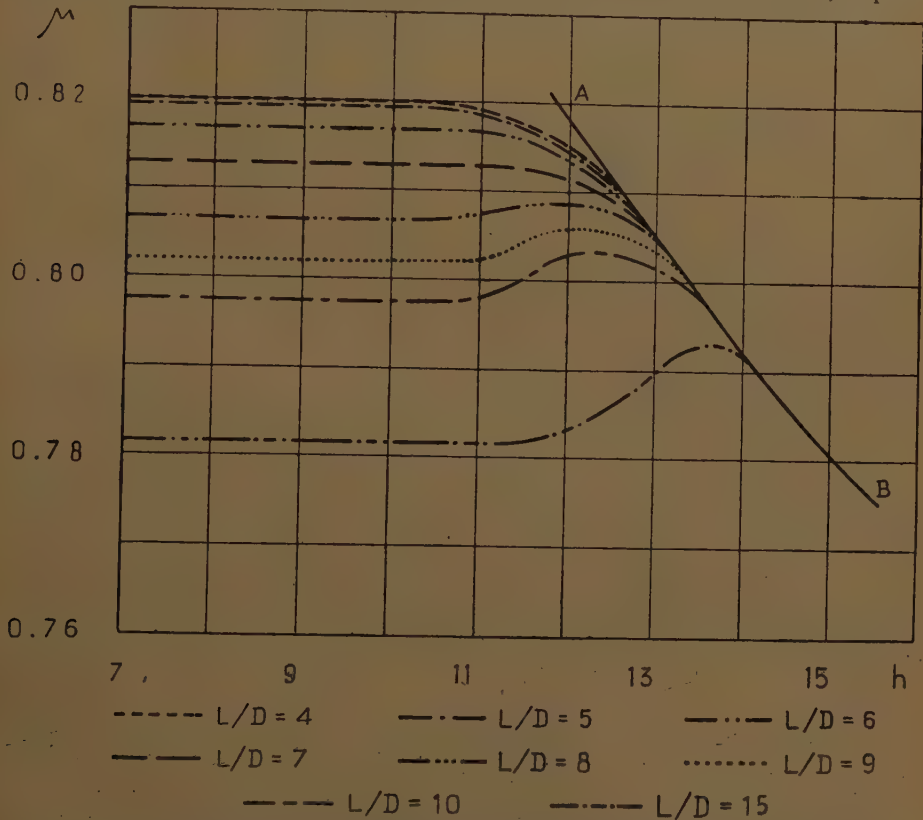


Fig. 23 — Coefficiente di efflusso in funzione del carico e della lunghezza del tubo ($D=2.77$ cm).

sbocco per qualunque valore del carico, finchè $\frac{L}{D} < 1$. Per un tubo addizionale con $\frac{L}{D} = 1.05$ si è realizzato invece efflusso a pieno sbocco, che è risultato stabile fino a carichi di 13 m circa.

B) Rilevi di pressione e carico totale.

Per fare luce sui fenomeni che si accompagnano al processo di movimento nel primo tratto di tubo e sulle dissipazioni di energia nella corrente, dipendentemente dal rapporto $\frac{L}{D}$, ho eseguito una serie completa di mi-

sure delle altezze piezometriche e pitometriche ¹⁾ in punti interni ai tubi addizionali di diametro interno 50.3 mm, lunghi 3; 2 e 1.5 D sotto carichi inferiori ai m 10, cioè in assenza di fenomeni di cavitazione, e su tubi di diametro 30,2 mm, lunghi 1.5 e 5 D , con carichi superiori ai m 10, vale a dire in presenza di fenomeni di cavitazione.

Il valore del diametro massimo dei tubi soggetti a prova è stato imposto dalla portata disponibile nella rete di circolazione.

Il materiale raccolto è stato riportato esclusivamente in diagrammi:

$$\left(\frac{p}{\gamma h} ; \frac{r}{D} \right) \quad ; \quad \left(\frac{p}{\gamma h} ; x \right)$$

$$\left(\frac{E}{h} ; \frac{r}{D} \right) \quad ; \quad \left(\frac{V}{\sqrt{2gh}} ; \frac{r}{D} \right),$$

ove ho indicato con i simboli: p/γ l'altezza piezometrica relativa; E l'altezza pitometrica relativa; V la velocità in un punto qualsiasi della corrente; p_a la pressione atmosferica; γ il peso specifico dell'acqua; h il carico; D il diametro del tubo; r la distanza di un punto generico dal centro della sezione distante x dalla sezione di imbocco.

I punti segnati sono stati ottenuti riportando a partire dalla ascissa $\frac{p_a}{\gamma} = 0$, assunta come riferimento, le altezze piezometriche e pitometriche relative, ragguagliate al carico h .

Si ha così il vantaggio di leggere rapidamente ²⁾, per dato h , sia i valori assoluti che quelli relativi delle grandezze segnate, attraverso le ovvie relazioni:

$$\frac{p_a}{\gamma h} + \frac{p}{\gamma h} = \frac{p'}{\gamma h}$$

$$\frac{p_a}{\gamma h} + \frac{E}{h} = \frac{e}{h}$$

essendo p ed e rispettivamente la pressione e l'altezza pitometrica assoluta.

In via preliminare ho proceduto alla taratura degli aghi mediante i

¹⁾ Con la dicitura *altezza pitometrica* indicherò da ora in avanti il valore del carico, in metri di colonna d'acqua, misurato a partire dalla punta del Pitot nella colonna idrometrica ad esso collegata.

²⁾ Nella rappresentazione adimensionale si sarebbe dovuto far riferimento al carico assoluto; per semplicità ho preferito far riferimento al carico relativo h .

quali sono stati effettuati i rilievi di velocità e pressione che sono oggetto del seguente punto C.

La taratura è stata effettuata su getti da luci scolpite a sezione circolare sotto diversi carichi.

I fori di presa degli aghi venivano disposti in corrispondenza di una sezione trasversale del getto libero situata a circa $0,70 D$ dall'imbocco e potevano essere spostati lungo un diametro orizzontale della sezione di misura, a mezzo di uno dei due coordinatometri-guida di cui ho detto innanzi.

Con l'ago piezometrico fu riscontrato che la pressione risultava costante in tutti i punti e pari alla pressione atmosferica; la colonna pitometrica segnava un valore costante e pari al carico fino ai punti immediatamente prossimi al contorno.

Nel corso di queste operazioni ho compiuto una serie di rilievi di pressione su getti liberi da luce circolare scolpita, di diametro 50 mm. Il materiale raccolto in fig. 24 ed elaborato come dirò poco appresso, consentirà di stabilire con maggiore sicurezza il confronto tra le modalità di efflusso da luci scolpite, per altro note, e da tubi addizionali a pieno sbocco.

Come ho già accennato, le esperienze su questi ultimi si possono suddividere in due gruppi, l'uno relativo a carichi inferiori ai 10 m, l'altro invece relativo a carichi superiori tutti ai 10.

C) Esperienze con carichi inferiori ai m. 10.

La prima serie di misure è stata condotta su un tubo addizionale di 50,3 mm. e lungo $3 D$; le due successive su tubi addizionali di pari diametro, ma lunghezza rispettivamente $2 D$ e $1,5 D$.

I risultati relativi al tubo lungo $3 D$ sono coordinati in grafici fig. 26a, 26b, 26c, 26d riportando dal valore $p_a = 0$, assunto come riferimento, i rapporti $\frac{p}{\gamma h}$ ed $\frac{E}{h}$ in funzione di r/D . Sono indicati in essi mediante triango-

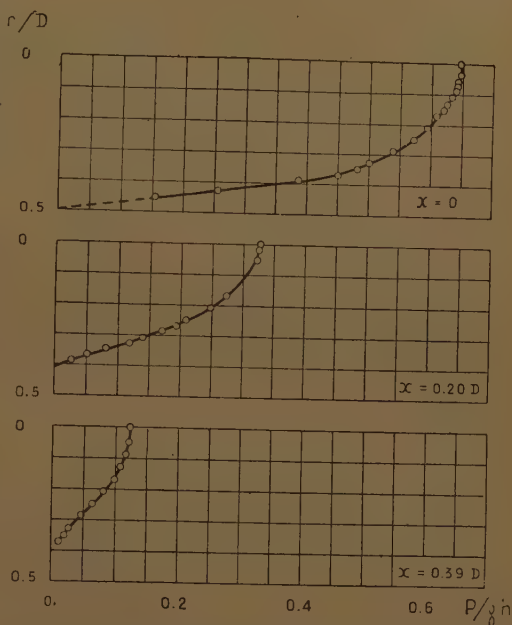


Fig. 24 — Distribuzione delle pressioni nelle sezioni trasversali di un getto libero da luce scolpita ($D = 5,0$ cm).

lini pieni i valori di $\frac{p}{\gamma h}$ dedotti dalle misure di pressione eseguite da GENTILINI in asse e alla parete.

Dove in prossimità della parete il tubo di Pitot con punta rivolta verso l'imbocco segnalava un'altezza E minore dell'altezza piezometrica, il che indicava l'esistenza di un vortice e quindi di una controcorrente nelle vicinanze della parete, ho proceduto alla misura di E a mezzo di un sottile ago pitometrico disposto con la punta verso lo sbocco (fig. 25).

Le pressioni variano notevolmente da punto a punto fino alla ascissa

$x = D$, presentando un minimo, in ciascuna sezione e fino alla ascissa $x = 0,78 D$, nelle immediate vicinanze del contorno.

Per i valori di x crescenti fino a circa $0,45 D$ i valori massimi delle pressioni che si verificano in asse diminuiscono, i minimi presso la parete invece aumentano; in complesso il valore medio va diminuendo.

Per $0,45 D \leq x \leq 0,78 D$, aumentano le pressioni in asse e alla parete, mantenendosi il valore massimo al centro di ciascuna sezione.

Per i valori di $x > 0,78 D$, invece, i massimi si riscontrano alla parete, i minimi in asse, con differenze tra loro molto piccole; in complesso la pressione media

Fig. 25 — Particolare della presa pitometrica presso la parete.

aumenta fino allo sbocco dove raggiunge il valore della pressione atmosferica.

I valori di $\frac{E}{h}$ sono rappresentati nelle figg. 26a, 26b, 26c, 26d, da punti segnati con cerchietti neri e riuniti da curve interpolari. Con rettangolini pieni sono indicati i valori dei rapporti $\frac{E}{h}$ ricavati col tubo di Pitot con punta rivolta verso lo sbocco.

Per valori di $0 \leq x \leq 0,30 D$ il rapporto $\frac{E}{h}$ si mantiene costante e pari ad 1 in quasi tutti i punti di ciascuna sezione; diminuisce rapidamente fino a divenire minore di zero solo in prossimità della parete.

Per $x > D$, esiste un nucleo centrale della corrente, di sezione sempre più piccola, in cui è $\frac{E}{h} = 1$; in prossimità della parete $\frac{E}{h}$ cresce continuamente con x avendosi in tutti i punti $\frac{E}{h} > \frac{p}{\gamma h}$.

Le curve rappresentatrici dei rapporti $\frac{E}{h}$ in funzione di $\frac{r}{D}$, fig. 26a, 26b, 26c, 26d dapprima assimilabili ad una bilatera formata da due segmenti

rettilinei (uno parallelo all'asse delle ordinate $\frac{r}{D}$ l'altro, esclusi i punti immediatamente prossimi alla parete, poco inclinato sull'asse delle ascisse), che si intersecano quasi ad angolo retto, assumono verso valle andamento prossimamente parabolico.

Presso la parete, per $x < D$, le curve rappresentatrici di $\frac{E}{h}$ e $\frac{p}{\gamma h}$, in funzione di $\frac{r}{D}$, tendono a confondersi; si differenziano per $x > D$, avendosi in tutti i punti delle successive sezioni trasversali: $\frac{E}{h} > \frac{p}{\gamma h}$.

Per completare l'indagine e per stabilire le eventuali modifiche che subisce il processo di efflusso dipendentemente dalle lunghezze del tubo, ho riportato nelle figg. 27 e 28 i risultati delle misure di pressione e carico totale condotte sui tubi addizionali con $D = 50,3$ mm ed L pari a 2 e 1,5 D sotto un carico $h = 2$ m, limitatamente però al tratto prossimo allo sbocco.

Si deduce da essi che, per dati valori di x , le curve che interpolano i punti $\left(\frac{p}{\gamma h}; \frac{r}{D}\right)$; $\left(\frac{E}{h}; \frac{r}{D}\right)$ almeno nelle sezioni prossime allo sbocco, hanno andamento analogo a quello dedotto per il tubo di pari diametro e sotto lo stesso carico ma di lunghezza 3 D .

D) Rilievi di pressione e carico totale sotto carichi maggiori di m 10.

Per realizzare gli elevati carichi necessari per condurre queste esperienze, a causa del limitato valore della portata disponibile nella rete di circolazione, sono stato costretto ad operare su tubi di diametro massimo 30,2 mm, nei quali il manicotto M del coordinatometro di fig. 17 era già causa di disturbo.

Ho dovuto quindi rinunciare all'impiego di questo e ad avvalermi solo del coordinatometro di fig. 19 limitando i rilievi di pressione e carico totale in punti interni alla corrente, prossimi allo sbocco.

Per il rilievo delle pressioni in asse, per tutta la lunghezza del tubo, ho fatto ricorso alla tecnica seguita da GENTILINI per la stessa indagine.

Ho usato un ago di acciaio di diametro esterno 1,6 mm, chiuso ad un estremo, lungo circa 650 mm, nella parete del quale erano ricavati due fori di 0,5 mm, situati a mezza circonferenza tra loro. Quest' ago era guidato, alla estremità interna all'adduttore, a 300 mm dal disco O' , da un anellino sostenuto da tre fili di acciaio inossidabile, ed all'altra estremità, fuori del tubo, dal coordinatometro di cui alla fig. 19. I fori di presa dell'ago erano a 200 mm dal coordinatometro.

L'indagine è stata condotta su tubi di diametro 30,2 mm e lunghezza rispettivamente 5 D e 1,5 D .

Dai diagrammi delle pressioni rilevate in asse al tubo (fig. 29) e dagli analoghi relativi alla parete, che non riporto, sono state ricavate le due

$p/\gamma h$

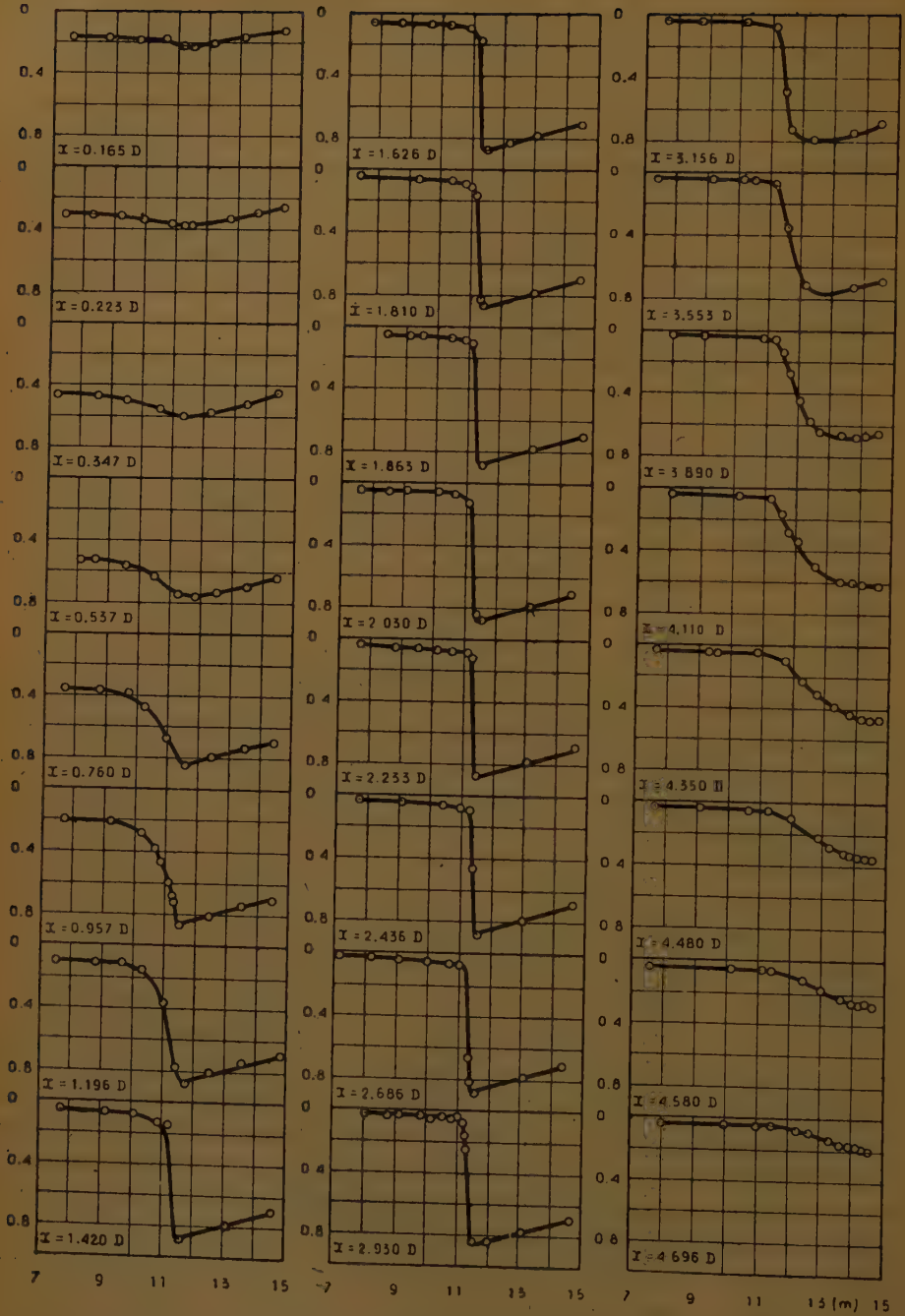


Fig. 29 — Diagrammi di pressione in punti sull'asse del tubo al variare del carico ($D = 3,02$ cm; $L = 5 D$).

serie di curve riportate in fig. 30 e 31, che si riferiscono ad un tubo di lunghezza $L=5D$, per carichi da m. 7 a m 14,50.

Al crescere del carico h , il tronco in cui è depressione ha lunghezza quasi costante fino ad $h=7$ metri, si allunga molto lentamente per $7 \leq h \leq 11$ m, spostandosi fin quasi a ridosso dello sbocco per $h > 11$ m. È degno di nota

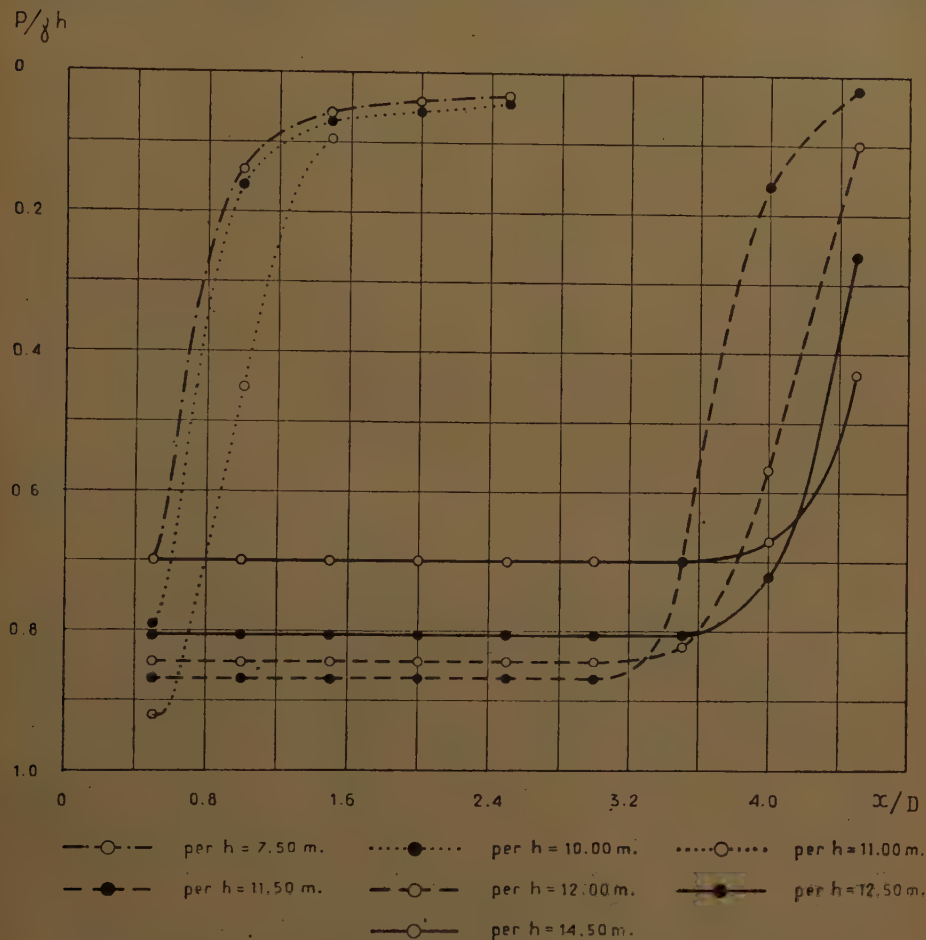


Fig. 30 — Depressioni alla parete del tubo al variare di h e di x/D ($D=3,02$ cm; $L=5D$).

il fatto che con h maggiore di 11 m, per un tratto di tubo sufficientemente lungo, le depressioni alla parete (fig. 30) ed in asse (fig. 31) sono eguali. Il rapido allungarsi del tronco in depressione si ha in corrispondenza di quel valore del carico per cui la pressione assoluta alla parete si scosta poco dallo zero ¹⁾.

¹⁾ In effetti l'apparecchiatura di misura mi consentiva lettura delle pressioni in colonna di mercurio, con l'approssimazione di circa mm 1. In questo campo rimanevano gli scostamenti della colonna manometrica

Nel tubo di lunghezza minore $L = 1,5 D$ le depressioni in asse aumentano al crescere del carico, senza raggiungere mai i limiti riscontrati nei tubi lunghi, come risulta dalla curva di fig. 34, che si riferisce a detto

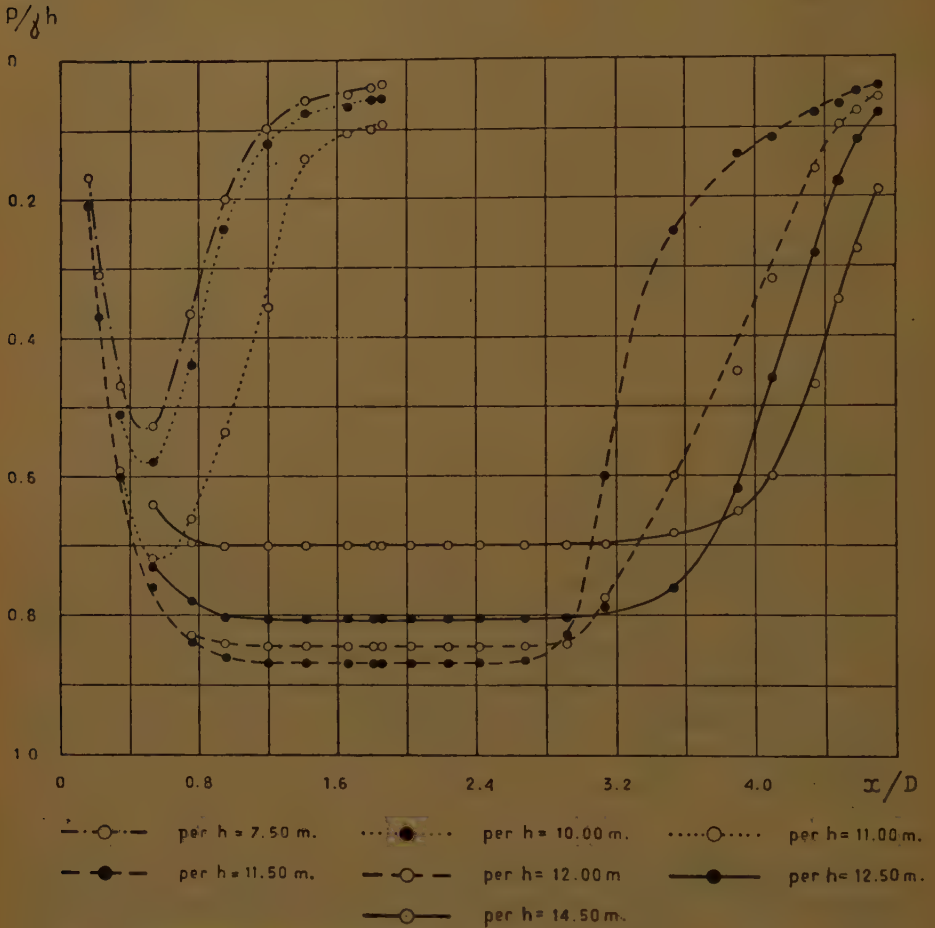


Fig. 31 — Depressioni lungo l'asse del tubo al variare di h e di x/D ($D = 3,02$ cm; $L = 5 D$).

tubo, sotto un carico di m 14,50, prossimo cioè al valore del carico di distacco.

Per integrare i rilievi illustrati, ed allo scopo di stabilire come si modificano sotto carichi elevati gli andamenti dei diagrammi di pressione a carico totale, soprattutto in presenza di fenomeni di cavitazione spinta, cioè a quei carichi per i quali le esperienze preliminari denotano un distacco netto della corrente dalla parete, ho condotto, come ho detto poco sopra, limitatamente a punti interni di sezioni prossime allo sbocco, una serie di

misure di altezze piezometriche e pitometriche di cui in fig. 32 do i risultati. In particolare da detta figura, che si riferisce a misure di $\frac{p}{\gamma h}$ ed $\frac{E}{h}$ in un tubo con $D = 30,2$ mm ed $L = 5 D$ per un carico di m 14,00, si deduce che le depressioni, nella sezione di ascissa $x = 3,53 D$, risultano costanti e pari a $0,71 \gamma h$.

Nei tubi di pari diametro e lunghezza $L = 1,5 D$, invece, (fig. 33), nella sezione a $0,69 D$ dall'imbocco e distante $0,81 D$ dallo sbocco, esiste una differenza di pressione da punto a punto, differenza che si va rapidamente attenuando fino alla ascissa $x = D$.

Le curve rappresentatrici dei rapporti $\frac{E}{h}$ nelle sezioni prossime allo sbocco, per il tubo lungo $5 D$, (fig. 32) assumono andamento parabolico, sensibilmente diverso da quelli relativi a tubi addizionali sotto bassi carichi (fig. 26d) ma lunghi $3 D$.

Nei tubi corti: $L = 1,5 D$ le curve $\left(\frac{E}{h}; \frac{r}{D}\right)$ ricavate per $h = 14,10$ m sono sensibilmente più appuntite di quelle ricavate nelle sezioni di pari ascissa di tubi di uguale lunghezza sotto un carico di m 2,00 (figg. 27 e 28).

In particolare la dissipazione di energia si estende fino al centro della sezione di sbocco divenendo ivi $\frac{E}{h} = 0,96$.

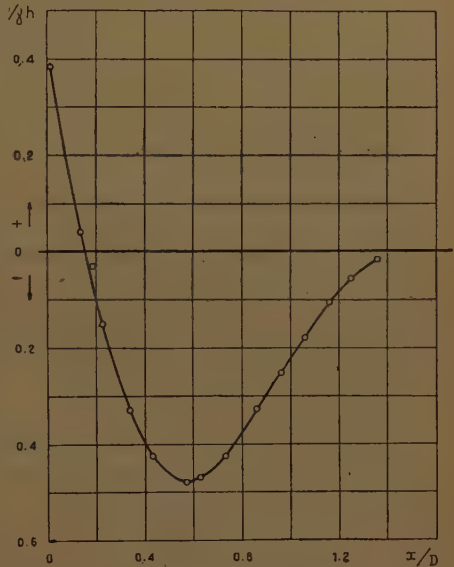


Fig. 34 — Depressioni lungo l'asse del tubo ($D = 3,02$ cm; $L = 1,5 D$ $h = 14,50$ m).

5. Esame dei risultati sperimentali.

Dai rilievi di pressione di cui si è detto nel precedente paragrafo, (fig. 30 e 31), risulta che finchè il carico è minore di m 10 e $x \leq D$ esiste un gradiente notevole di pressione da punto a punto della corrente, sì che non è possibile ammettere l'esistenza di una sezione contratta nel significato ricorrente in foronomia. Per carico superiore, in tubi con $L/D \leq 3$ le pressioni tendono rapidamente ad eguagliarsi raggiungendo poco a valle della sezione di imbocco il valore della tensione τ di vapore saturo dell'acqua alla temperatura ambiente. In queste condizioni definendo ancora:

$$\mu = \frac{Q}{\sigma \sqrt{2gh}}$$

si potrà scrivere ovviamente:

$$(2) \quad \mu \sigma \sqrt{2gh} = KC \sigma \sqrt{2g \left(h + \frac{p_a - \tau}{\gamma} \right)}$$

essendo K e C i noti coefficienti di velocità e di contrazione relativi a getti liberi da luce scolpita, e quindi:

$$(3) \quad \mu = KC \sqrt{1 + \frac{p_a - \tau}{\gamma h}}.$$

Se tracciamo nel piano cartesiano (μ, h) la curva AB , (figg. 22 e 23), rappresentatrice della (3) per $KC = 0,605$ e $\frac{p_a - \tau}{\gamma} = 10$ m, osserveremo che per tubi addizionali di lunghezza compresa tra 3 e 15 D le curve sperimentali del coefficiente di efflusso, da un certo valore del carico in poi, crescente con $\frac{L}{D}$, si confondono con la AB , se ne discostano sempre più sensibilmente mano a mano che la lunghezza del tubo diminuisce da 3 a 1,5 D .

L'ascissa del punto oltre il quale le curve sperimentali $\mu(h)$ per dato tubo addizionale, si confondono con la AB rappresenta, quindi, il carico oltre il quale nel tubo addizionale la corrente si contrae con le stesse modalità che nei getti liberi da luce scolpita conformemente alle ipotesi con cui è stata dedotta la (3).

In particolare per tubi di lunghezza compresa tra 8 e 15 D , il coefficiente di efflusso, costante per h fino ad 11 m., cresce rispetto a detto valore per carichi h mediamente poco superiori agli 11 m, per diminuire ulteriormente con la legge individuata dalla (3).

Rifacendoci alle osservazioni su tubi di vetro di lunghezza $L > 5 D$, questo risultato è giustificato dal fatto che a carichi elevati, per l'avvenuto distacco della corrente dalla parete del tubo fin quasi a ridosso della sezione di sbocco, la maggiore lunghezza del tubo cessa rapidamente di esercitare sul valore di μ la ovvia influenza esercitata a carichi bassi, sì che risultando la lunghezza del tubo stesso virtualmente minore, il coefficiente di efflusso per dati valori del carico dovrà dapprima aumentare (fig. 23) per diminuire poi all'ulteriore aumento di h , con la legge definita dalla (3).

Nei tubi di lunghezza $L < 3 D$, i rilievi di pressione con carichi $\infty 14$ m. (figg. 33 e 34) denotano un gradiente di pressione da punto a punto di ciascuna sezione trasversale della corrente, sempre più sensibile al diminuire della lunghezza del tubo. Le ipotesi prese a base della (3) dovranno quindi cadere in difetto; le curve sperimentali $\mu(h)$ pertanto si dovranno

scostare via via più sensibilmente dalla AB a mano a mano che diminuisce la lunghezza del tubo (fig. 22).

A rendere espressiva la dipendenza di μ dalla lunghezza del tubo e da h , in fig. 35 ho riportato le curve rappresentatrici della funzione $\mu(L/D)$ per assegnati valori del carico.

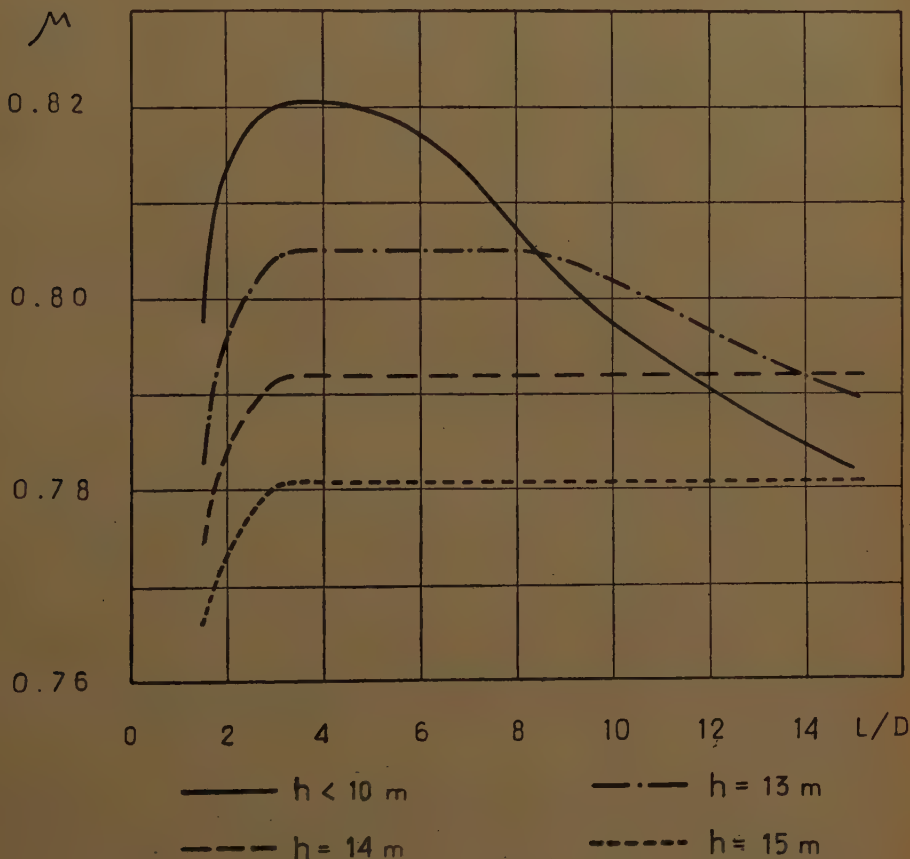


Fig. 35 — Coefficiente di efflusso in funzione della lunghezza del tubo ($D = 2,77$ cm).

Il coefficiente di efflusso per $h < 10$ m cresce dapprima con $\frac{L}{D}$, decresce poi al crescere ulteriore di L/D . Per $h = 13$ m, μ cresce per $1,5 \leq \frac{L}{D} \leq 2,5$, rimane praticamente costante per $2,5 \leq \frac{L}{D} \leq 6$, diminuisce successivamente col crescere di L/D .

Per $h > 14$ m, μ cresce con $\frac{L}{D}$ fino a 2,5 per rimanere praticamente costante fino a $\frac{L}{D} = 15$.

Nel paragrafo 2 ho riferito che dalle esperienze condotte su tubi di

vetro si aveva l'impressione che l'acqua attraversasse con notevoli velocità solo parte di ciascuna sezione trasversale prossima all'imbocco.

A conferma, per ciascuna sezione trasversale ho dedotto attraverso la

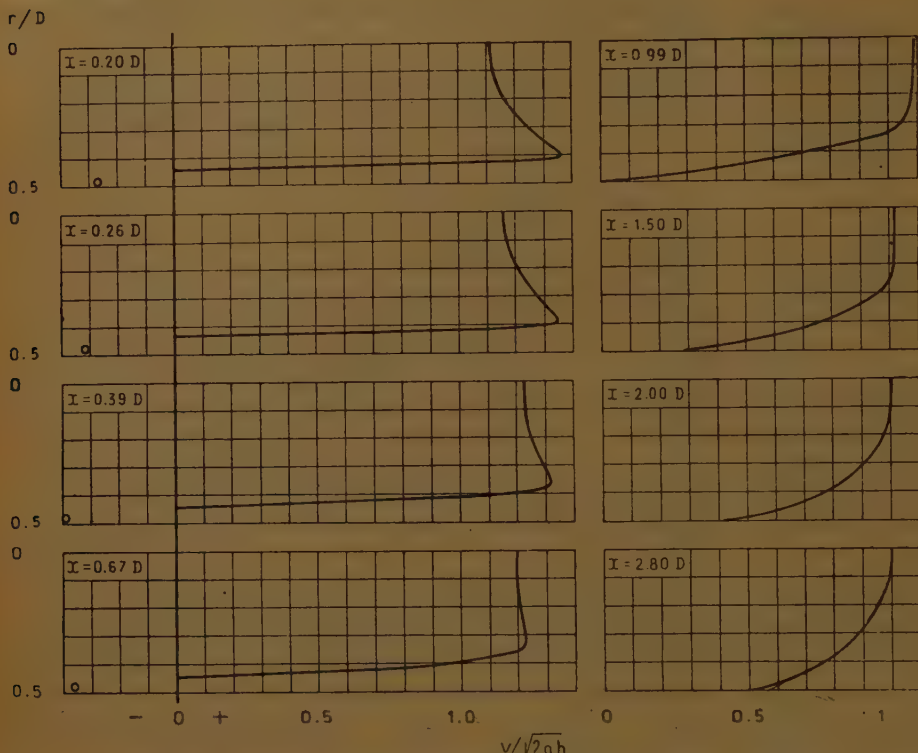


Fig. 36 — Diagrammi di velocità lungo diametri di sezioni trasversali della corrente ($D = 5,03$ cm; $L = 3 D$ $h = 2$ m).

ovvia relazione:

$$(4) \quad v = \sqrt{2g \left(E - \frac{p}{\gamma} \right)},$$

i diagrammi di velocità, $\left(\frac{v}{\sqrt{2gh}} ; \frac{r}{D} \right)$, di cui in fig. 36 riporto i più significativi e successivamente ho proceduto al calcolo della sommatoria: $2\pi \sum v r \Delta r$. Arrestando il calcolo a quel valore di $r = R_c$ per il quale con l'approssimazione dell'1% è:

$$(5) \quad 2\pi \sum_0^{R_c} v r \Delta r \cong Q_c,$$

in cui Q_c è la portata misurata direttamente, ho dedotto per il tubo da 50,3 mm ed $L = 3 D$, per il quale i rilievi sono completi, i valori della

funzione $R_e(x)$ riportata in tabella II, colonna 4 e rappresentati dalla curva $R_e(x)$ riportata in fig. 37.

Risulta così delimitato lo spazio occupato dal liquido che non partecipa attivamente al moto generale di trasporto.

La sezione della parte viva della corrente dapprima si contrae, successivamente si allarga fino a confondersi con la sezione del tubo all'ascissa $x \cong D$.

L'eguaglianza che si ha tra i valori di R_e e $D/2$ per $x > D$, sta a dimostrare, d'altra parte, la accuratezza con cui sono stati compiuti i rilievi, in quanto là dove la corrente occupa tutto il tubo lo scarto percentuale tra la portata calcolata con la (5) e quella misurata Q_e , tabella II colonna 3, è dell'ordine dell'1%.

Per tale motivo per $x < D$ ho arrestato il calcolo della (5) a quel valore di R_e per cui lo scarto tra la portata ottenuta e quella effettiva è dell'ordine dell'1%.

Poichè la vena va ad occupare l'intera sezione solo per $x > D$, sembra lecito affermare che non è possibile efflusso a pieno sbocco per $L = D$.

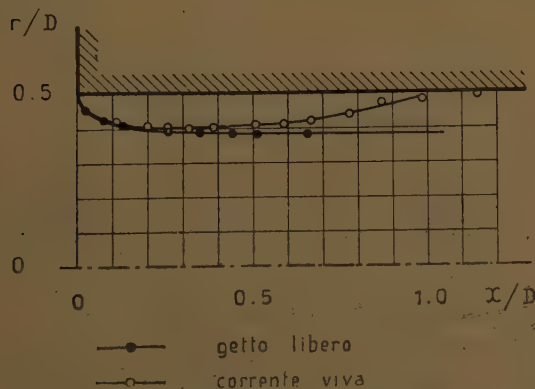


Fig. 38 — Confronti tra le sezioni meridiane del getto libero e della corrente viva ($D = 5,03$ cm; $L = 3D$; $h = 2$ m).

parte viva della corrente nel primo tratto a valle dello sbocco si differenzia dalla vena da luce scolpita solo per il fatto che la pressione al contorno è diversa da quella atmosferica.

A conferma sta quanto segue. È noto [15], [16], [17], [18], [19], che per un normale efflusso in aria libera da luce circolare scolpita di diametro D l'eccesso della pressione p_r in un punto, distante r dall'asse, di una se-

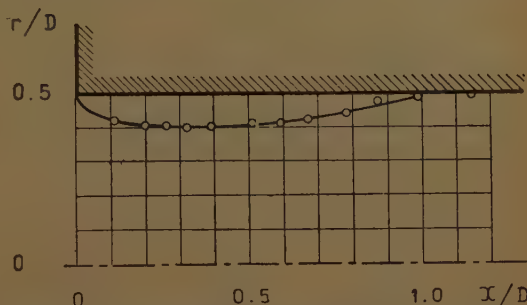


Fig. 37 — Sezione meridiana della corrente viva, come da elaborazione dei dati sperimentali ($D = 5,03$ cm; $L = 3D$; $h = 2$ m).

Le esperienze appositamente eseguite e delle quali ho riferito al paragrafo precedente sono conferma di questa conclusione.

La curva $R_e(x)$, ottenuta dalla elaborazione dei dati sperimentali, praticamente si confonde (fig. 38) nel primo tratto $x = 0,2D$ con la sezione meridiana ottenuta da rilievo su getto libero effluente da luce scolpita di pari diametro sotto il carico di 3,80 m. Cioè la

T A B E L L A II.

x/D	$\frac{2\pi \sum v r \Delta r}{1/\text{sec}}$	ϵ %	$D_c = 2R_c$	$\frac{\pi \sum v^3 r \Delta r}{\rho Q h} = \eta_c$	$\frac{2\pi \sum p v r \Delta r}{\gamma Q h} = \eta_s$	$\eta_t = \eta_c + \eta_s$
0,11	10,21	+ 0,4	42,50	1,378	0,404	0,974
0,20	10,12	— 0,4	40,50	1,543	0,554	0,989
0,26	10,24	+ 0,7	40,00	1,602	0,622	0,980
0,32	10,09	— 0,9	40,00	1,617	0,654	0,963
0,39	10,29	+ 1,2	40,00	1,623	0,673	0,950
0,51	10,29	+ 1,2	41,50	1,542	0,617	0,925
0,59	10,04	— 1,2	41,50	1,466	0,564	0,902
0,67	10,09	— 0,8	42,50	1,375	0,496	0,879
0,78	10,18	+ 0,1	44,50	1,187	0,355	0,832
0,87	10,21	+ 0,4	47,50	1,039	0,271	0,768
0,99	10,29	+ 1,2	48,50	0,942	0,169	0,773
1,14	10,31	+ 1,4	5,03	0,812	0,115	0,726
1,25	10,32	+ 1,5	5,03	0,807	0,080	0,727
1,50	10,12	— 0,5	5,03	0,775	0,045	0,730
1,60	10,18	+ 0,1	5,03	0,772	0,040	0,732
1,80	10,25	+ 0,8	5,03	0,759	0,030	0,729
2,00	10,17	0	5,03	0,740	0,025	0,715
2,20	10,25	+ 0,8	5,03	0,745	0,020	0,725
2,40	10,20	+ 0,3	5,03	0,709	0,015	0,709
2,50	10,11	— 0,6	5,03	0,714	0,012	0,702
2,60	10,13	— 0,4	5,03	0,717	0,010	0,707
2,80	10,14	— 0,3	5,03	0,695	0,005	0,693
3,00	10,07	— 1,0	5,03	0,695	0,000	0,695

zione parallela al piano della luce, e distante $x \leq 0,50 D$ dall'imbocco, rispetto a quella p_o al contorno rapportato al carico h , varia con r e con x , ma praticamente non con h , cioè:

$$(6) \quad \frac{p_r - p_o}{\gamma h} = f(r, x).$$

Quando la pressione al contorno p_o è diversa da quella atmosferica p_a occorrerà tener conto che la trasformazione di energia potenziale in cinetica al contorno della vena è: $\gamma h + p_a - p_o$, non sussistendo più l'eguaglianza $p_a = p_o$. È pertanto da attendersi che, facendo riferimento alla parte viva della corrente, la quale si confonde con quella del getto libero, la funzione:

$$(6') \quad \frac{p_r - p_o}{\gamma h + (p_a - p_o)} = f_1(r, x)$$

coincide per i due tipi di corrente.

L'esperienza, in effetti, conferma le previsioni.

Dalla elaborazione dei dati, desunti dalle figure 24, 25 e 39, come si è

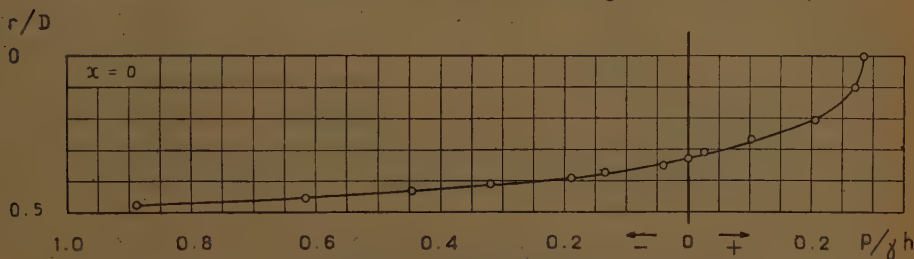


Fig. 39. — Distribuzione delle pressioni lungo il diametro orizzontale della sezione di imbocco di un tubo addizionale. ($D=5,03$ cm.; $L=3 D$; $h=2$ m).

detto, si ha una perfetta coincidenza (fig. 40) dei diagrammi di pressione per la luce scolpita e per la corrente viva nel tubo addizionale.

Dalla fig. 38 si nota che la coincidenza tra la sagoma della vena libera e della corrente viva nel tubo addizionale si conserva fino alla distanza $x \approx 0,2 D$ dall'imbocco.

Più a valle i due contorni si discostano dapprima pochissimo, poi più sensibilmente e ciò è evidentemente da attribuirsi agli attivi moti di rimescolamento che, dallo spazio occupato da liquido che non partecipa attivamente al moto di trasporto, si diffondono all'interno della corrente viva ¹⁾.

¹⁾ La differenza sostanziale tra questa conclusione e quella degli Autori antichi sta nel fatto che la coincidenza tra la sagoma della corrente viva e quella del getto libero è effettiva fino alla ascissa $x = 0,2 D$ anzicchè fino a $x = 0,5 D$, cioè prima

A conforto della sostanziale coincidenza dei due fenomeni per sezioni fino a $x \approx 0,2 D$ e al lento divergere tra loro a mano a mano che la turbolenza penetra nell'interno della vena, valgono le considerazioni seguenti.

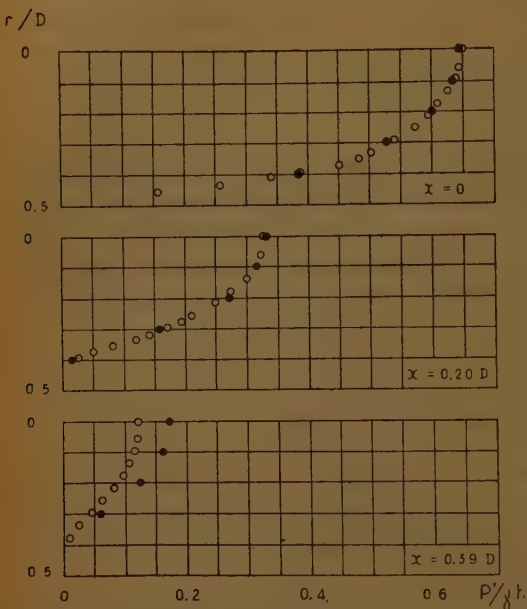


Fig. 40. — Elaborazione dei rilievi di pressione su getti liberi (cerchietti vuoti) e nella corrente da tubi aggiuntivi (con cerchietti pieni) secondo la (6'').

si presta utilmente il diagramma rappresentativo della funzione:

$$(7) \quad \frac{p_a - p_e}{\gamma h + (p_a - p_e)} = \frac{p''}{\gamma h''}$$

avendo posto:

$$p'' = p_a - p_e \quad \text{e} \quad \gamma h + (p_a - p_e) = \gamma h'',$$

per dati valori di x , essendo p_a la pressione assoluta al centro e p_e quella alla parete.

Le curve relative al getto libero (fig. 41) e a corrente in tubi aggiuntivi

ancora che sia completo il processo di contrazione della vena. A tal proposito è esplicito il pensiero ad es. di MASONI: « È quindi da ritenersi che la vena nel « tratto presso la sezione contratta corra racchiusa in uno spazio pieno d'acqua la « quale non è animata da moto di traslazione o, per dir meglio, è composta di « molecole di cui i valori medi delle velocità nella direzione dell'asse del tubo, « sono trascurabili in rapporto alle velocità dei filetti liquidi che compongono il « getto ».

(fig. 42) praticamente coincidono nel primo tratto fino ad $x \approx 0,2 D$, successivamente quelle relative a tubi addizionali sotto bassi carichi si discostano da quelle corrispondenti al getto libero, mentre tra queste ultime e le curve ottenute in presenza di fenomeni di cavitazione, si nota, eccetto uno scostamento piccolo in vicinanza dell'imbocco, concordanza fino quasi a ridosso dello sbocco.

Rifacendoci alle osservazioni sui tubi di vetro e ai diagrammi delle depressioni alla parete, si desume che la turbolenza fa sentire i suoi effetti in asse al tubo per carichi fino a 10 m circa. Appena al contorno della corrente viva sparisce la zona di liquido da cui ha origine la turbolenza, la corrente riprende in quasi tutto il tubo le caratteristiche salienti del getto libero, stabilendosi dall'ascissa $x=0,5 D$ fin quasi a ridosso dello sbocco, pressione costante in tutti i punti di ciascuna sezione, così come confermato dai diagrammi di pressione all'interno di un tubo addizionale di diametro 30,2 mm, lunghezza

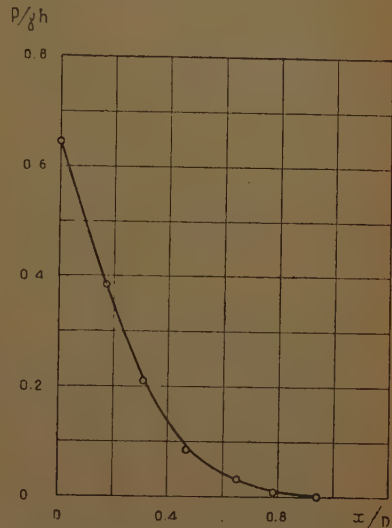


Fig. 41. — Distribuzione delle pressioni lungo l'asse di un getto libero.

5 D e sotto un carico di m 14,00 (figg. 31 e 34).

A ulteriore conferma sta il fatto che il rapporto $\frac{E}{h}$ si mantiene costante e pari a 1 in tutti i punti della corrente fino alla ascissa $x = 3,53 D$ (fig. 32).

L'effetto del diffondersi della turbolenza nella corrente sotto bassi carichi e per un ampio campo di valori di h , risulta dalle curve di fig. 43. Le coordinate dei punti da esse interpolati sono rispettivamente i valori della potenza cinetica rapportata a quella totale iniziale γQh :

$$\eta_c = \frac{\sum_0^{Rc} c^3 r \Delta r}{\sum_0^{Rc} 2gh \sum c r \Delta r} \quad (8)$$

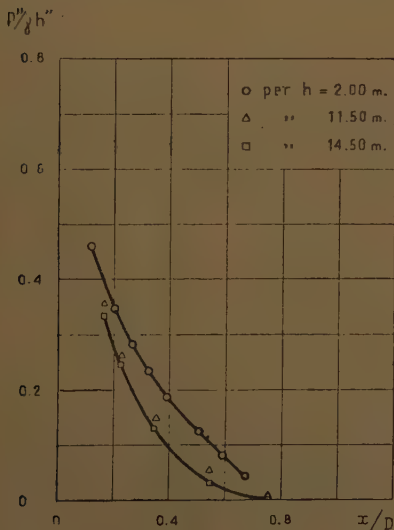


Fig. 42. — Elaborazione dei rilievi di pressione lungo l'asse della corrente in tubo addizionale secondo la (7), per diversi valori del carico ($D = 3.02$; $L = 5 D$).

della potenza di pressione:

$$(9) \quad \eta_p = \frac{\sum_0^{Rc} p r \Delta r}{\gamma h \sum_0^{Rc} v r \Delta r}$$

e della potenza totale:

$$(10) \quad \eta_t = \eta_c + \eta_p,$$

valutate nelle successive sezioni trasversali della parte viva della corrente

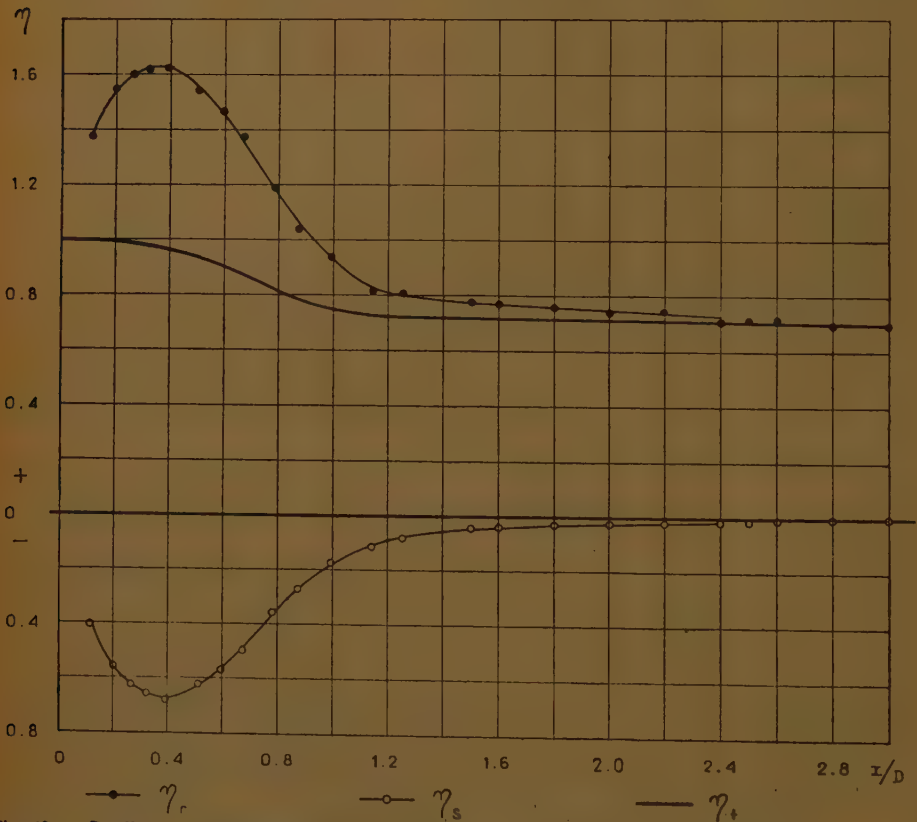


Fig. 48. — Rendimenti della trasformazione della potenza totale iniziale della corrente in potenza cinetica, potenza di pressione e potenza totale nelle successive sezioni trasversali della corrente. ($D = 5,03$; $L = 3D$; $h = 2$ m).

e rapportate alla potenza iniziale $\gamma 2\pi \sum v r \Delta r$. Il calcolo di η_c ed η_p è stato fatto introducendo nelle sommatorie le p misurate e le V dedotte dalla relazione: $v = \sqrt{2g(E - p/\gamma)}$ ed assumendo valori di Δr non maggiori di 2 mm.

I valori delle η_c ; η_s ; η_t sono riportati nella Tabella II, in cui è lo scarto percentuale tra la portata misurata e quella calcolata attraverso la (5).

Nel primo tratto fino alla ascissa $x/D = 0,2$ il rendimento η_t si mantiene praticamente costante e pari ad 1, diminuisce rapidamente fino alla ascissa $x \cong 1,1 D$, cioè là dove la corrente viva si adagia alla parete del tubo, per decrescere lentamente fino allo sbocco dove raggiunge il valore 0,695.

Il rendimento della potenza cinetica media cresce con notevole rapidità fino a raggiungere un massimo per $x/D = 0,35$, diminuisce rapidamente fino alla ascissa $x/D = 1,2$ per raggiungere con variazione quasi lineare il valore $\eta_c = 0,695$ allo sbocco.

Andamento opposto ha la curva rappresentatrice della η_s : rapidamente decrescente fino ad $x/D = 0,4$ crescente nel tratto $0,4 \leq x/D \leq 1,2$, praticamente coincidente con la pressione atmosferica nel tratto $1,2 \leq x/D \leq 3$.

È degno di nota che ad andamenti analoghi delle curve ora descritte è giunto per altra via KALINSKE [8] nelle sue ricerche sulle correnti in espansione.

Allo sbocco è evidentemente $\eta_c = \eta_t$ ed inoltre se le velocità fossero costanti ed eguali alla velocità media V_m , dovrebbe ancora essere:

$$(11) \quad \eta_c = \eta_t = \frac{V_m^2}{2g} = \mu^2.$$

In effetti la distribuzione di velocità non è uniforme, sicchè nelle condizioni dell'esperienza risulta essere il coefficiente di CORIOLIS $\alpha \cong 1,06$ per i bassi carichi e per tubi lunghi, mentre è $\alpha \cong 1,17$ per tubo lungo $1,5 D$ e con $D = 50,3$ mm sotto un carico di 2 m.

Poichè è:

$$(12) \quad \eta_t = \alpha \mu^2,$$

si comprende che non è possibile trascurare il coefficiente α quando si vogliono determinare le dissipazioni di energia nell'interno del tubo. È ovvio invece che quando si studia il fenomeno dell'efflusso nei riguardi della valutazione della portata che può effluire da un dato tubo addizionale la efficacia di questo non è in relazione al coefficiente α ma alla V_m .

Da tale punto di vista è legittimo valutare l'efficienza del tubo addizionale facendo riferimento al coefficiente di efflusso μ , e calcolare con GEN-

TILINI l'effetto della dissipazione mediante il parametro:

$$(13) \quad \lambda = 1 - \mu^2.$$

Il valore $\alpha\mu^2$ può essere così definito come rendimento dell'efflusso o meglio con terminologia ormai ricorrente nella letteratura tecnica *rendimento totale* della doppia trasformazione di energia potenziale in cinetica e viceversa.

Riepilogo e conclusioni.

Dai risultati sperimentali raccolti nel corso dell'indagine di cui è oggetto la presente nota, si traggono le seguenti conclusioni:

1°. con nessun carico è stato possibile realizzare efflusso a pieno sbocco in tubi addizionali di lunghezza $L < 1,05 D$;

2°. il carico di distacco che segna il passaggio da efflusso a pieno sbocco ad efflusso libero in tubi con $1,05 \leq \frac{L}{D} \leq 15$ si mantiene superiore ai m. 15 ed è scarsamente influenzato dalla lunghezza del tubo;

3°. il processo di efflusso da tubi addizionali si svolge con caratteristiche che sostanzialmente non mutano per $h < 10$ m; per tali valori del carico si può dire:

a) il coefficiente di efflusso è praticamente costante per uno stesso tubo; per dato $\frac{L}{D}$ diminuisce al crescere del diametro; in tubi di pari diametro cresce dapprima con $\frac{L}{D}$ finchè è: $1,5 \leq \frac{L}{D} \leq 4$, diminuisce all'ulteriore aumento di $\frac{L}{D}$;

b) le pressioni variano notevolmente da punto a punto della corrente presentando in ciascuna sezione un massimo al centro ed un minimo nelle immediate vicinanze della parete, fino alla sezione di ascissa $x = 0,78 D$; procedendo verso valle le differenze di pressione si attenuano rapidamente fino a divenire praticamente trascurabili nelle sezioni di ascissa $x \geq 1,5 D$;

c) in prosecuzione dell'imbocco resta individuato uno spazio occupato da *corrente viva*; la sezione meridiana di questa si identifica fino alla ascissa $x = 0,2 D$ con quella di un getto libero da luce scolpita di pari diametro, se ne discosta a valle sempre più sensibilmente, fino a confondersi con quella del tubo nella sezione di ascissa $x = D$; nello spazio non occupato dalla corrente viva si stabilisce un vortice con controcorrente di velocità finita in prossimità della parete;

/D

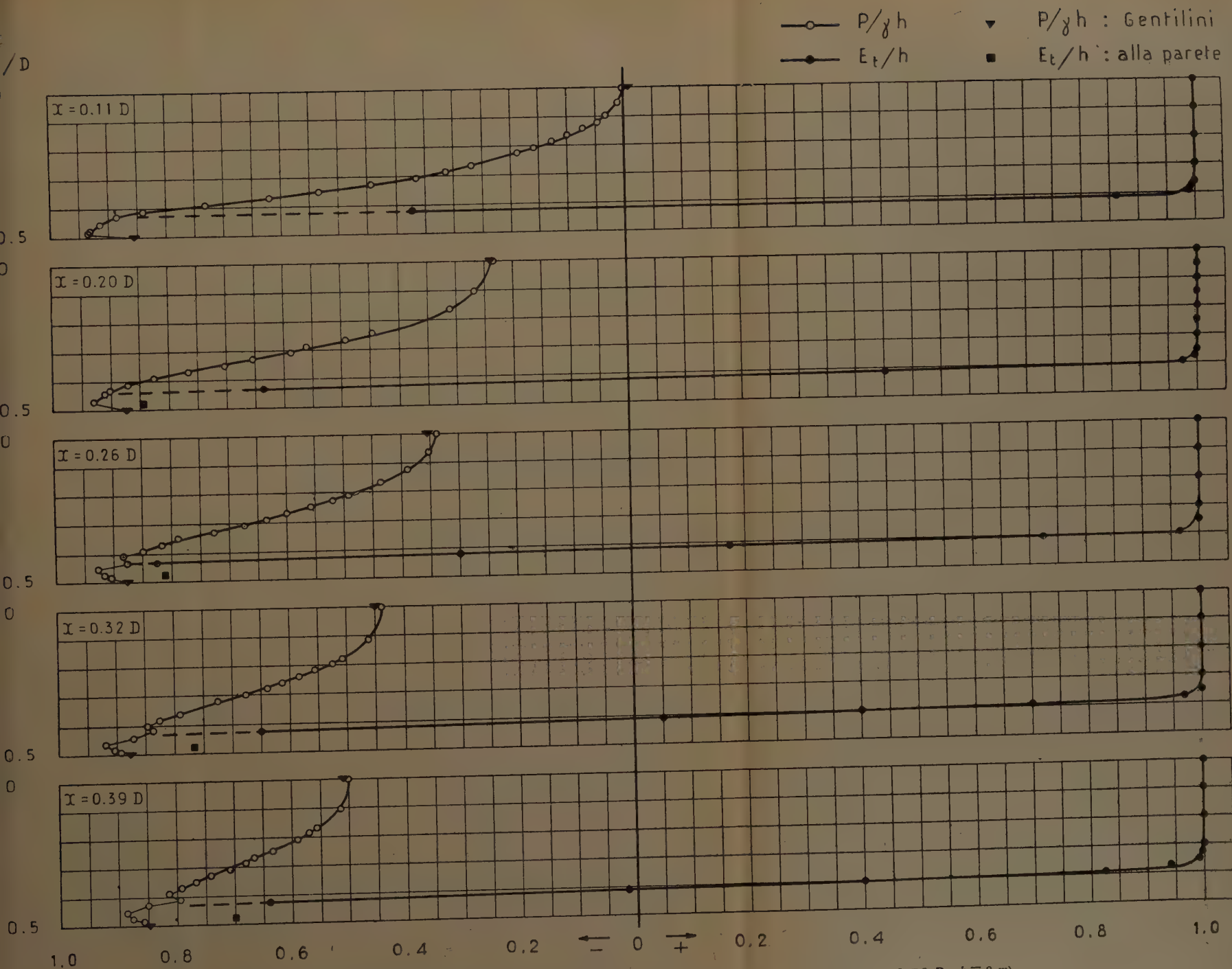


Fig. 25a — Distribuzione delle pressioni e dei carichi totali relativi, in punti interni della corrente ($D = 5.03$ cm; $L = 3 D$ $h = 2$ m).

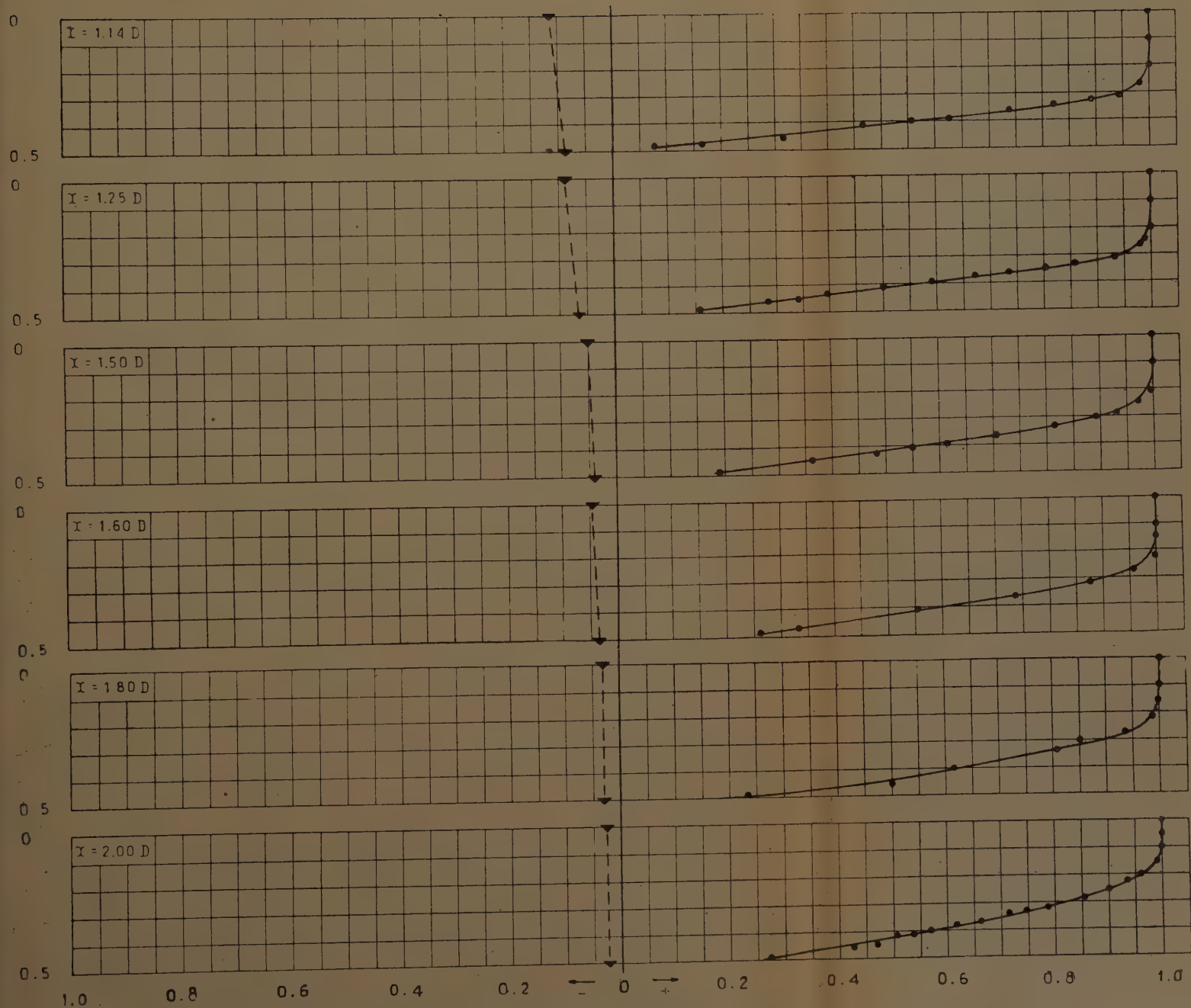


Fig. 25c — Distribuzione delle pressioni e dei carichi totali relativi, in punti interni della corrente ($D=5.03$ cm; $L=3 D$; $h=2$ m).

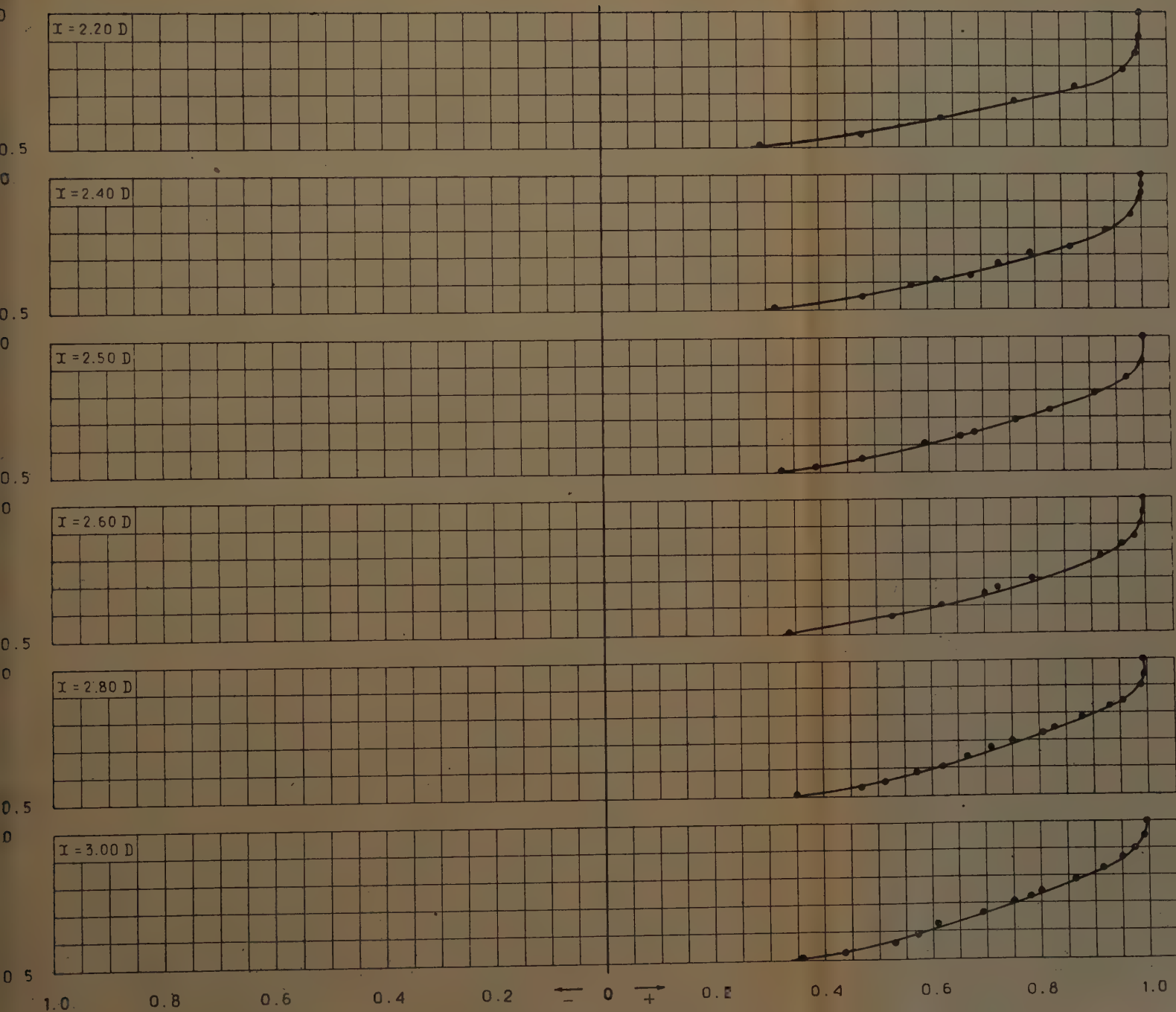
r/D


Fig. 25d - Distribuzione delle pressioni e dei carichi totali relativi, in punti interni della corrente ($D=5.03$ cm; $L=7 D$; $h=2$ m).

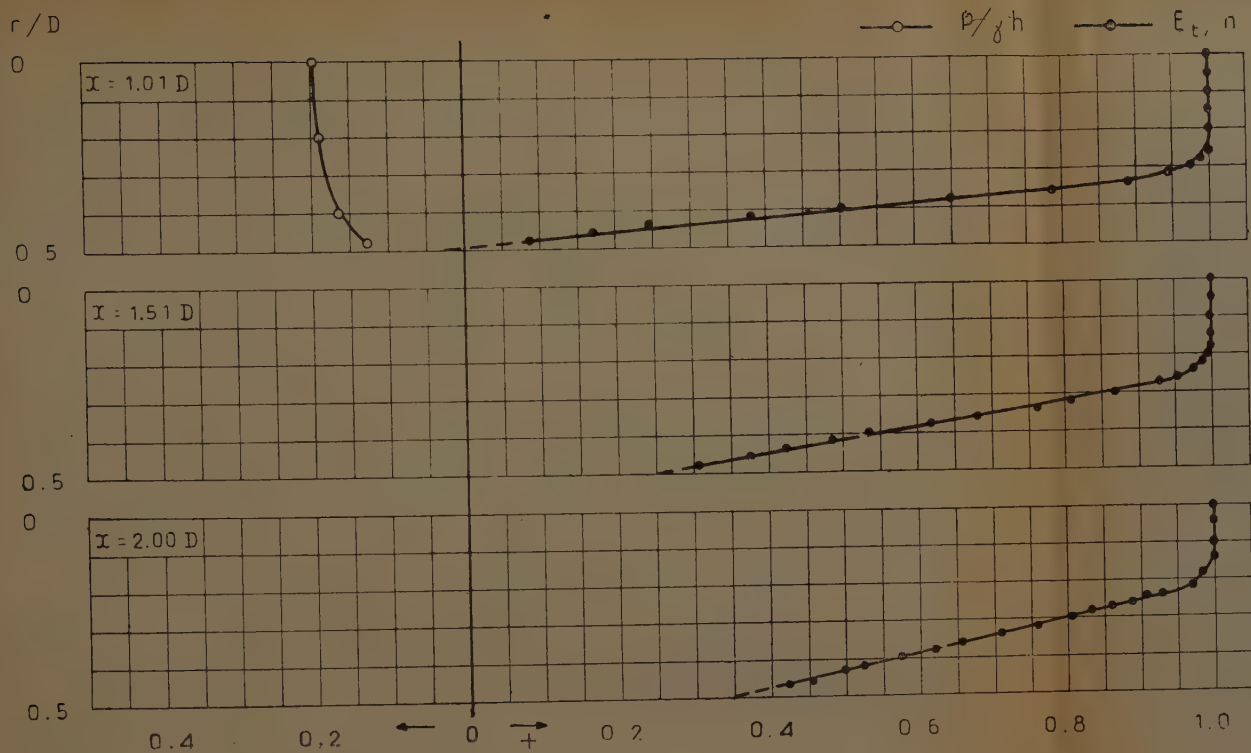


Fig. 27 — Distribuzione delle pressioni e dei carichi totali relativi in punti interni della corrente ($D = 5.03$; $L = 2 D$; $h = 2$ m).

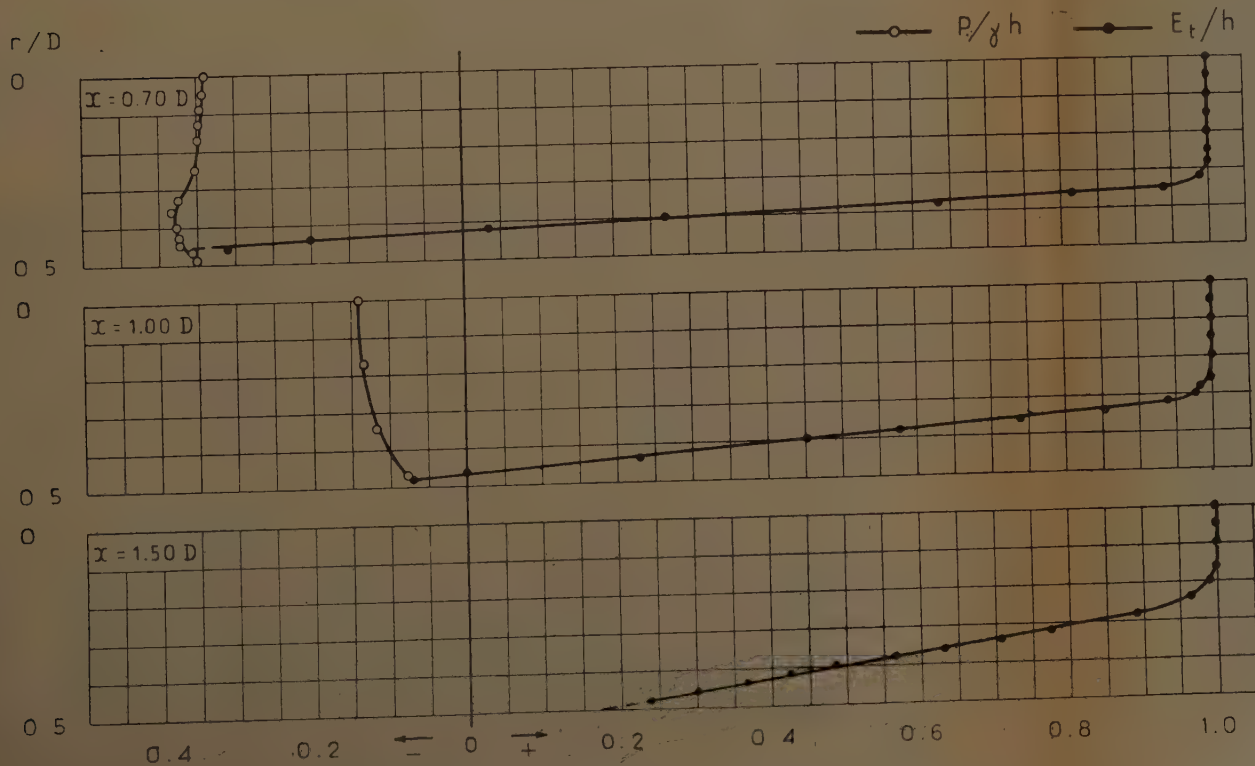


Fig. 28 — Distribuzione delle pressioni e dei carichi totali relativi in punti interni della corrente ($D = 5.05$ cm; $L = 1.5 D$; $h = 2$ m).

d) la maggior parte della trasformazione di energia di trasporto in energia di turbolenza, avviene nel tratto compreso tra le ascisse $x = 0,2 D$ ed $x = D$;

e) il rendimento della trasformazione di energia che si svolge nel processo di efflusso a pieno sbocco, pari al prodotto $\alpha \mu^2$, è praticamente indipendente dalla lunghezza del tubo addizionale per $\frac{L}{D} \leq 5$;

4°. il processo di efflusso muta per $h \geq 10$ m; svolgendosi con modalità diverse in dipendenza della lunghezza del tubo e precisamente:

a) in tubi con $1,05 \leq \frac{L}{D} \leq 2,5$ l'efflusso è accompagnato da rumore fino al carico di distacco; il coefficiente di efflusso cresce con la lunghezza del tubo, ma diminuisce al crescere di h con legge quasi lineare;

b) in tubi con $\frac{L}{D} \geq 3$ l'efflusso è accompagnato da rumore e vibrazioni finchè $h < 11,50$ m circa; a carichi superiori il rumore si estingue e l'efflusso avviene sotto forma di un getto cristallino, staccato dalla parete, in cui, come nei getti liberi, le pressioni variano da punto a punto fino ad $x = 0,5 D$, nelle sezioni a valle divengono costanti e pari alla tensione di vapore saturo dell'acqua alla temperatura ambiente; in prossimità dello sbocco il getto si allarga bruscamente portandosi a contatto con la parete del tubo, l'energia cinetica si riduce in parte per trasformarsi nell'energia potenziale necessaria perchè, allo sbocco, la pressione eguagli quella atmosferica, in parte per far fronte alle dissipazioni di energia che si accompagnano al rapido processo di espansione della corrente nel breve tratto finale del tubo;

c) a parità di diametro, il coefficiente di efflusso per $\frac{L}{D} < 7$ diminuisce al crescere del carico con legge analoga a quella trovata da PARDOE, per $\frac{L}{D} > 7$ μ cresce rispetto al valore relativo a carichi minori, raggiunge un massimo in corrispondenza di valori di h crescenti con $\frac{L}{D}$, decresce successivamente con legge quasi lineare fino al carico di distacco; per tubi non molto lunghi ed $h \geq 14$ m, il coefficiente di efflusso varia con h ma è indipendente da $\frac{L}{D}$;

5°. i primi fenomeni di cavitazione accompagnati da rumori e vibrazioni dell'apparecchiatura sperimentale e localizzati in un breve tratto prossimo all'imbocco cominciano a manifestarsi per valori del carico intorno ai 9 m e cioè alquanto inferiori a quello per il quale, stando alle esperienze di GENTILINI, HARRIS, PARDOE e quelle da me eseguite, le pressioni alla parete dovrebbero risultare prossime alla tensione τ di vapore

dell'acqua; tale contraddizione è però solo apparente in quanto dai rilievi risulta che, in prossimità dell'imbocco, i minimi di pressione si verificano non alla parete, ma a breve distanza da questa, sì che al crescere del carico la pressione in questa zona discende fino a valori tali da determinare l'insorgere di fenomeni di cavitazione, mentre le pressioni alla parete sono ancora notevolmente superiori alla tensione di vapore saturo dell'acqua.

Prima di chiudere il presente lavoro esprimo tutta la mia gratitudine al prof. IPPOLITO per i preziosi consigli e per i mezzi messi a mia disposizione. Ringrazio inoltre il giovane ingegnere Roberto CARRAVETTA, Assistente presso il nostro Istituto, per l'appassionata ed intelligente collaborazione nella raccolta del vasto materiale sperimentale.

Napoli, Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] VENTURI G. B. *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides*. Paris, 1797 (V. anche GENTILINI [7]).
- [2] MASONI U. *Di alcune ricerche sperimentali sui tubi addizionali*. Atti del R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli, Vol. V, n. 5.
- [3] CAPITÒ M. *Efflussi da tubi addizionali cilindrici*. Atti del Collegio degli Ingegneri di Palermo, 1884 (V. anche GENTILINI [7]).
- [4] HARRIS C. W. *Hydraulics*. J. Wiley, N. Y., 1944.
- [5] PARDON W. S. *New knowledge on standard reservoir Mouthpiece*. Eng. N. R., 1916.
- [6] ANGUS R. W. *The standard short tube*. Boll. n. 7 (1927) dell'Università di Toronto, (V. GENTILINI [7]).
- [7] GENTILINI B. *Esperienze sull'efflusso da tubi addizionali cilindrici*. L'Energia Elettrica, fasc. 6, 7, 8 1943.
- [8] THOMAS H. A. *Cavitation in outlet conduits of high dams*. TRANS. A. S. C. E. 1942, pag. 421.
- [9] MC NOWN J. S. *Pressure distribution and cavitation on submerged boundaries*. Università di Iowa, giugno 1946. Boll. 81.
- [10] KALINSKE A. A. *Conversion of kinetic to potential energy in flow expansion*. TRANS. A. S. C. E. Vol. III, 1946, pag. 355.
- [11] SCHMIDT E. *La cavitazione nelle macchine idrauliche*. L'Energia Elettrica, giugno 1949.

[12] IPPOLITO G. *Il Laboratorio di Costruzioni Idrauliche nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli*. I Vol. Atti Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia.

[13] DE MARTINO G. *Nuove installazioni per il Laboratorio dell'Istituto di Costruzioni Idrauliche ed Impianti Speciali Idraulici della Università di Napoli*. II Vol. Atti della Fondazione del Mezzogiorno d'Italia. Napoli.

[14] ROUSE U. *Use of the low-velocity air tunnel in hydraulic research*. Università di Iowa, giugno 1946. Boñ. 31.

[15] BAZIN H. *Expériences sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses dans leur intérieur*. Mem. Acad. France. T. XXXI, n 4 1904 (vedi DE MARCHI [17]).

[16] DE MARCHI G. *Esperienze sulla contrazione delle vene liquide*. A. LL. PP. VIII. 1925.

[17] DE MARCHI G. *Idraulica*. Ed. Hoepli Milano, 1946.

[18] NEBBIA G. *Lezioni di Idraulica*, Libreria Treves di Leo Lupi, Napoli 1948,

[19] LELLI M. *Lezioni di Idraulica*. Litografia Roveri, Bologna 1930.



BIAGIO LONGO

N. a Lelno Borgo il 3-2-1872

M. a Roma il 29-11-1950

BIAGIO LONGO

Commemorazione letta dal socio corrispondente Giuseppe Catalano

(Adunanza del dì 7 aprile 1951)

Negli ultimi due o tre decenni del secolo scorso anche in Italia si delinearono due nuove tendenze nello studio della Botanica, affiancandosi alla vecchia mentalità sistematica, alla quale s'ispirava fino allora lo studio delle piante e che si compendia nell' aforisma linneano: « *Fundamentum Botanices duplex est: Dispositio et Denominatio* ». Da una parte una tendenza, che possiamo chiamare biologica, la quale, appoggiandosi sul concetto definitivamente acquisito della natura vivente degli esseri vegetali, impervia lo studio delle piante su una morfologia ed una sistematica, diciamo così, ragionata e ricercava nei fenomeni della vita dei vegetali il finalismo biologico, considerando anzi lo studio di tali fenomeni più che come fine a sè stessi, come punto di partenza per assurgere alla definizione della forza vitale ed alla risoluzione di problemi filosofici più alti. Dall'altra parte, invece, lo sforzo di applicare anche allo studio delle piante i nuovi mezzi di ricerca scaturiti dal progresso delle altre scienze naturali, segnatamente dalla Chimica e dalla Fisica; fra questi, soprattutto, l'applicazione sempre più su vasta scala del microscopio, ormai quasi definitivamente perfezionato. Una tendenza, quindi, che potrebbe chiamarsi materialistico-obbiettiva, in quanto si appagava della verità contingente, piccola o grande che fosse, e tentava la spiegazione dei grandi problemi della vita su basi materialistiche ovvero li lasciava deliberatamente da parte. Entrambe queste tendenze, alimentate dai rapporti culturali colle altre Nazioni, specialmente colla Germania, allora all'avanguardia del progresso scientifico, assunsero a dignità di scuole e ciascuna ebbe infatti i suoi Maestri, i suoi seguaci, le sue glorie ed anche le sue esagerazioni ed aberrazioni.

Con Biagio Longo è scomparso l'ultimo esponente di questa seconda scuola, che in Italia ebbe il suo centro principale in quel vecchio Istituto botanico di Via Panisperna a Roma, diretto da Pier Romualdo PIROTTA, che ne fu il capo o almeno il più autorevole rappresentante. Insieme col BUSCALIONI, coll'AVETTA, col KRUCH, col CHIOVENDA, col CORTESI, col CARANO, per ricordare solo i compagni che, come Lui, raggiunsero la Cattedra, il LONGO mosse i suoi passi da quell'Istituto e ne propagò i metodi di studio

affermatisi, si può dire, per una buona parte di questo primo nostro mezzo secolo.

Iniziò la carriera, poco più che ventenne, nel 1895 come Assistente dell'Istituto Botanico di Roma. Il « curriculum » di Biagio Longo si può dividere in 4 periodi: il periodo romano, che comprende 13 anni, durante i quali il Longo lavorò nel predetto Istituto in qualità di Assistente prima, di Aiuto e Libero Docente dopo; il periodo senese, che comincia dalla nomina a professore straordinario di Botanica nell'Università di Siena, avvenuta nel 1906 e durò 9 anni; il periodo pisano, che comincia dal 1915 e finisce nel 1929; e finalmente il periodo napoletano, che va dal 1930 al 1948. Collocato a riposo nel 1942 per raggiunti limiti di età, Egli rimase ancora per cinque anni, in qualità di incaricato, alla direzione del nostro Istituto botanico, finchè nel 1948 non si ritirava definitivamente a vita privata a Roma, dove chiudeva la sua esistenza a 78 anni, il 29 dello scorso novembre. Era nato a Laino Borgo, in quel di Cosenza, il 3 febbraio 1872.

La produzione scientifica del Longo comprende più che un centinaio di titoli, distribuiti quasi regolarmente nei quattro periodi sopra indicati: si contano infatti circa 33 pubblicazioni nel periodo romano, 26 nel successivo periodo senese, che fu forse il più intenso e che, insieme colle successive 30 o poco più pubblicazioni riferibili al periodo pisano, costituiscono il nerbo più sostanziale dell'attività scientifica del LONGO. Finalmente nel periodo napoletano, che fu il più lungo, essendo durato 18 anni, e corrisponde all'apogeo della maturità e della esperienza nella carriera del LONGO, contiamo un'altra trentina di titoli, ivi compresi però i 7 tomi pubblicati sotto la sua direzione del « Bollettino dell'Orto Botanico dell'Università di Napoli », fondato nel 1899 da Federico DELPINO e continuato dal CAVARA fino al Tomo IX, e le Relazioni sull'attività della Stazione sperimentale per le piante officinali che annualmente redigeva per il Ministero dell'Agricoltura.

Nella sua lunga carriera il Longo ebbe numerosi ed ambiti riconoscimenti. Poco dopo la nomina a professore a Siena, nel 1907, la Società delle Scienze, detta dei XL, gli assegnava una medaglia d'oro. Nel 1915 ebbe assegnato dall'Accademia dei Lincei, in unione coll'entomologo Filippo SILVESTRI, il premio Reale. Nel 1920 fu eletto socio corrispondente dei Lincei, per passare due anni dopo socio nazionale. Sotto il passato regime, nel 1939, fu nominato Accademico d'Italia insieme col SILVESTRI già ricordato. Fu poi membro di parecchie Accademie scientifiche italiane, come quelle di Torino, Bologna e di quella detta dei XL, oltre che di quelle della nostra Città. Dopo sei o sette anni dallo scioglimento dell'Accademia d'Italia ebbe la soddisfazione di vedersi reintegrato, or non è neanche un anno, nell'Accademia dei Lincei e con questa vittoria Egli chiudeva la lunga serie delle sue fortunate battaglie nel mondo.

Esaminando la produzione scientifica del Longo nel suo complesso, si

rileva che un gran numero delle sue pubblicazioni hanno per oggetto il medesimo argomento, sia che ricorra sotto la specie di completamento od ampliamento di ricerche precedenti, sia come rettifiche o risposte a critiche. Il maggior numero di lavori è quello che hanno per oggetto la Floristica e la speciografia, riguardanti quasi esclusivamente la sua terra natale di Calabria. Sono una trentina di lavori che cominciano con alcuni contributi alla conoscenza della Flora della valle del Lao, coi quali esordì nella carriera scientifica, mentre gli altri, su argomenti affini, sono regolarmente intercalati col resto della sua produzione, a dimostrazione del preminente interesse che, sia pure a intermittenza, questo argomento di ricerca suscitava nel LONGO. Ma già pochi anni dopo l'inizio della sua carriera vediamo nella produzione del LONGO l'influenza del Maestro e troviamo che Egli affronta sotto la guida, od anche collaborando con questi, il campo della Anatomia vegetale. Insieme cogli studi di Morfologia esterna ed a qualche altro lavoro di Fisiologia e Biologia, questi lavori di anatomia costituiscono la parte più importante della produzione scientifica del LONGO. Alcuni di essi costituiscono lo sviluppo ulteriore di ricerche iniziate a Roma col PIROTTA; tali sono in primo luogo quelli, nei quali Egli applicò il microscopio ad una delle più delicate ed interessanti ricerche di anatomia e fisiologia vegetale, alla elucidazione cioè di una questione che ancora al principio di questo nostro secolo si presentava ammantata di un suggestivo velo di mistero: voglio dire lo studio dei dettagli del processo di fecondazione nelle Fanerogame. Una decina di lavori trattano appunto dei particolari molto interessanti, ed allora non ben chiariti, del comportamento del polline e del tubetto pollinico a seguito della impollinazione. Questo è appunto uno degli argomenti che ritorna, come sopra ho detto, anche nei successivi studi, anch'essi numerosi, che ebbero per oggetto il Fico ed il Caprifico e fu senza dubbio, per così dire, il cavallo di battaglia di tutta l'attività scientifica del LONGO o meglio l'argomento che più di tutti Egli predilesse. Io cercherò pertanto di dare un'idea dell'importanza di queste ricerche, non dissimulandomi la difficoltà di far ciò senza annoiare eccessivamente gl'illustri miei ascoltatori; ma confortato dalla certezza che siffatta materia presso ogni persona sensibile esercita un fascino, un'attrattiva speciale, la quale certamente mi farà perdonare se inevitabilmente sarò costretto a scendere a qualche dettaglio.

Ognuno sa, adunque, che la polvere fecondatrice prodotta negli organi florali maschili e precisamente nelle antere è costituita da miriadi e miriadi di globetti microscopici, i così detti « granelli pollinici », i quali devono essere trasferiti dall'antera, dove furono prodotti, sulla superficie dello stamma, che è l'organo sessuale femminile predisposto per accoglierli. Questo trasferimento dicesi appunto « impollinazione » ed avviene per mezzo dell'aria, sempre più o meno mossa, nel caso della impollinazione così detta « anemofila », ovvero per mezzo di alcune categorie di animali, specialmente

di insetti, nel caso della impollinazione così detta « zoofila »; gli animali che rendono siffatto servizio alle piante diconsi « pronubi ». Ma quel che avviene dopo la impollinazione, ossia, ripeto, dopo l'arrivo dei globetti pollinici sulla superficie dello stigma, rimase per lungo tempo un mistero. La osservazione empirica mostrava bensì che all'impollinazione seguiva, di regola, la fecondazione, vale a dire la formazione del frutto e del seme, con la qual cosa si può dire compiuta la riproduzione; ma la essenza stessa intima della fecondazione rimase oggetto di disparate congetture. Vi era, per es., chi pensava che essa fosse l'effetto di qualche nebulosa eccitazione prodotta semplicemente dalla presenza del polline sulla superficie stigmatica; altri sospettava un qualche ulteriore spostamento del granello pollinico stesso fino alla cavità ovarica, dove risiedono appunto i primordi dei semi stessi, e così via. Spetta a Gian Battista AMICI il merito di aver scoperto quel che avviene in ogni granello pollinico pervenuto che sia, comunque, sulla superficie dello stigma. Da ogni granello pollinico invero si sviluppa una meravigliosa, delicatissima costruzione di celluloso, in forma di un tubicino, dalle pareti sottilissime, dal calibro di pochi millesimi di mm, la quale si allunga quanto è necessario per raggiungere colla sua estremità uno degli ovuli racchiusi nella cavità ovarica, attraversando i tessuti dello stigma e dello stilo, vale a dire per alcuni centimetri e talora per parecchi centimetri. Ogni ovulo riceve di regola un tubetto pollinico, necessario per la sua fecondazione. La scoperta di questo interessante fenomeno e soprattutto la sua esatta interpretazione furono, ripeto, il merito del grande naturalista, fisico e matematico italiano; merito del resto universalmente riconosciuto nel mondo scientifico internazionale, sia pure dopo lunghe lotte; ma giustamente il LONGO volle ricordarlo agli immemori connazionali, traendone l'occasione dal rinvenimento di un vecchio cimelio conservato nello Istituto botanico di Pisa, rinvenimento di cui volle dare notizia in una pubblicazione del 1928.

La formazione del tubetto pollinico fu osservata per la prima volta dall'AMICI sugli stimmi della *Portulaca oleracea*, la ben nota pianticella dai fusti striscianti, un po' carnosì, spontanea nelle nostre campagne che si raccoglie per farne insalate. Egli ne constatò effettivamente il cammino fino all'ovulo. In occasione della prima riunione degli Scienziati italiani a Pisa che, come è noto, fu la progenitrice delle moderne periodiche riunioni della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, avvenuta nel 1839, e fra i cui promotori vi era appunto l'AMICI, fu da questi chiarito che i tubetti pollinici camminano nel tessuto stilare e non sono già dei canaletti che preesistono in questo, come fu supposto da qualcuno. L'AMICI presentò adunque un modello in cera, in quella occasione, di tutto l'andamento del fenomeno, precisamente il modello che tutt'ora si conserva nell'Istituto botanico di Pisa, ed illustrato dal LONGO. Oltre a questo, che rappresentava un ovario di zucca in sezione longitudinale, mostrante i tubetti pollinici

già pervenuti a destino, l'AMICI presentava un altro modello, rappresentante un granello pollinico della stessa pianta germinato su uno stigma, ed un terzo modello, che raffigurava la parte apicale di un ovulo colla estremità di un tubetto pollinico insinuata nel micropilo. Costruttore di tali modelli fu un tal Calamai, pisano.

Ma, come ho detto precedentemente, la scoperta dell'AMICI non chiariva ancora il segreto della formazione dell'embrione, di cui la penetrazione del tubetto pollinico rappresentava la premessa. Secondo una strana teoria, dovuta allo SCHLEIDEN, il primordio dell'embrione si doveva trovare appunto nel polline ed il tubetto pollinico non faceva che portarlo in sito, dove poi esso iniziava il suo sviluppo. Ma l'AMICI si oppose strenuamente a questa teoria e nella 4ª Riunione degli Scienziati italiani tenutasi a Padova nel 1842, dimostrava che nella zucca l'embrione ha origine dalla vescichetta embrionale (così allora si chiamava la oosfera) la quale preesiste nell'ovulo prima dell'arrivo del tubetto pollinico. Quest'ultimo in realtà, come si esprime testualmente l'AMICI, « la impregna, irrorandola col suo fluido prolifico ». Che questa espressione, come tante altre similari usate: miscela del fluido maschile col fluido femminile, versamento della fovilla pollinica, ecc., fossero vaghe ed indeterminate lo riconosceva lo stesso AMICI, confessando di non sapere in che cosa effettivamente consistesse la fecondazione; ma intanto un punto era stato sicuramente acquisito e cioè che il tubetto pollinico porta seco qualche cosa di fecondante a qualche cosa che deve essere fecondata e che già preesiste nell'ovulo. In questa concezione del meccanismo intimo della fecondazione l'AMICI ebbe il sostegno dell'HOFMEISTER (1849). L'essenza reale della fecondazione rimase tuttavia ancora allo stato nebuloso e per alcuni decenni si continuò a parlare di eccitazioni, di fluidi, di fovilla, finchè non furono scoperti i nuclei pollinici aventi valore di gameti e non s'interpretò rettamente il valore morfologico filogenetico del granello pollinico, quale cioè l'equivalente della microspora. Il tubetto pollinico non è che l'espressione materiale di una modalità della fecondazione che fu detta « sifonogamica » ed ha lo scopo di portare i nuclei gametici a destino e cioè l'uno in contatto colla oosfera, l'altro col nucleo secondario del sacco embrionale, da cui trae origine il tessuto nutritore.

Il LONGO adunque ristudiò questo interessante argomento, dapprima in collaborazione col PIROTTA, poi da solo, rivoigendo specialmente la sua attenzione alle modalità del percorso del tubetto o sifone pollinico, sia durante il suo viaggio lungo lo stilo, sia una volta pervenuto in prossimità di un ovulo. Così Egli chiarì la causa del così detto percorso « endotropico » del tubetto pollinico, quello cioè in cui esso, anzichè seguire il canale stilare (chè allora si parla di « percorso ectotropico ») s'insinua fra gl'intercellulari del tessuto stilare per giungere egualmente all'interno della cavità ovarica. Egli sostenne infatti che anche in tal caso ciò che guida il tubetto pollinico è una eccitazione chemotattica analoga a quella del percorso ecto-

tropico. Queste osservazioni furono condotte sulle stesse specie studiate dall'AMICI e su altre, come *Crataegus*, *Impatiens*, ecc. nelle quali il LONGO rivelò parecchi altri interessanti dettagli, come a dire la penetrazione del tubetto pollinico nell'ovulo attraverso la base (basigamia) anzichè attraverso il micropilo (porogamia) e la parte che assume ulteriormente, in certi casi, il tubetto pollinico quale intermediario della nutrizione dell'embrione, ecc.

Più notevoli furono i risultati della continuazione di queste stesse ricerche su un'altra pianta, ossia sul Fico, che pure gli diede materia per una dozzina di pubblicazioni. È ben noto che sotto il nome generico di « Fico » si designano piante assai diverse per l'aspetto, per la forma degli organi, per la natura dei prodotti, ecc., tutte però sufficientemente concordanti per consentirci di ascriverle alla medesima entità specifica, cui si dà il nome di *Ficus carica*. Così, ad es., si distinguono anzitutto le piante che danno i comuni fichi commestibili, ossia i fichi gentili o domestici; si conosce altresì il fico che cresce spontaneo sui muri o sulle rupi e non dà che raramente fichi mangerecci, ossia il fico selvatico; e finalmente si conosce il così detto « caprifico » simile al precedente, ma più piccolo, che non dà mai fichi eduli. La specie cui vanno riferite tutte queste piante appartiene ad un genere indubbiamente insignito di caratteri di primitività, rivelata specialmente dalla costituzione florale assai semplice. I fiori infatti sono sempre unisessuali ed hanno un unico involucro perianziale, assai piccolo, incospicuo, che può anche mancare. Vi sono pertanto fiori maschili, costituiti da un numero variabile di stami, e fiori femminili, costituiti da un solo pistillo contenente un solo ovuto. Fiori maschili e fiori femminili sono generalmente presenti nella medesima infiorescenza. Quest'ultima è forse la cosa più caratteristica di tutte le specie di *Ficus*, per la sua forma forse unica nel regno vegetale: quella di una coppa chiusa, detta « antodio ». La genesi morfo-filogenetica dell'antodio si ricostruisce pensando ai rami di infiorescenze dorsoventrali che abbiano concresciuto lateralmente, non però fino in cima, lasciando perciò un ostiolo all'apice. Infiorescenze così fatte esistono in realtà nelle altre Urticales, come ad es. in *Elatostema ficoides* ed altre.

Nel *Ficus carica*, in particolare, vi sono due sorta di fiori femminili che si distinguono per la lunghezza dello stilo: ossia fiori brevistili e fiori longistili; gli uni e gli altri hanno anche un diverso destino biologico. Ora la distribuzione dei fiori maschili e quella degli stessi fiori femminili delle due categorie ora accennate negli antodi è assai varia; ma oltre che per questo carattere, gli antodi si distinguono anche per l'epoca della loro comparsa e del loro sviluppo sulla pianta. Come è noto, tutti i fichi sono piante legnose a foglie caduche; alla ripresa dell'attività vegetativa, in primavera, non ha luogo un ulteriore ramificazione dell'albero, bensì ogni ramo precedente si prolunga per mezzo della propria gemma apicale; contemporanea-

mente all'ascella delle foglie già cadute dell'anno precedente si sviluppano i primi antodi, che son detti « fioroni ». Questi maturano a principio della estate, dando dei frutti o meglio dei « falsi frutti » o « siconi ». Ma anche all'ascella delle foglie del nuovo ramo, che prolunga il precedente, spuntano degli antodi, i quali però danno luogo ai siconi solo durante l'estate o addirittura nell'autunno e vengon detti « forniti ». Sono questi per lo più i fichi mangerecci prodotti dagli alberi domestici coltivati. Gli ultimi antodi del ramo, sorgenti all'ascella delle foglie più alte, verso il finire della stagione sono detti invece « cratiri »; essi di regola non vengono a maturazione, bensì rimangono a svernare sulla pianta, ovvero cadono inferti al suolo.

Ora la impollinazione e la fecondazione dei fiori femminei, data la struttura e la configurazione tutt'affatto particolare dell'infiorescenza, non può che essere l'opera di un agente esterno, di un pronubo; e questo pronubo è precisamente un insetto dell'ordine degli Imenotteri appartenente al genere *Blastophaga*. Le caratteristiche biologiche di questo insetto concordano mirabilmente con la struttura degli antodi stessi, dei fiori femminei e della necessità della fecondazione staurogamica. Il genere *Ficus* comprende circa 600 specie, tutte distribuite nelle regioni tropicali; la specie *Ficus carica*, di cui qui ci occupiamo, è la più settentrionale, come distribuzione geografica, essendo limitata al bacino mediterraneo ed alle zone temperate. Ora ogni specie di *Ficus* ha la sua *Blastophaga* impollinatrice; non so se alle 600 specie di *Ficus* tropicali corrispondano altrettante specie di *Blastophaga* ma è certo che, qualunque sia il valore sistematico da attribuire a questi insetti, volendo esprimere efficacemente la realtà dei fatti quale si osserva in Natura, si dovrebbe dire che le *Blastophaga* sono state fatte per i bisogni e quasi sulla misura delle varie specie di *Ficus* e queste per quelle!

La *Blastophaga* pronuba del *Ficus carica* è una specie ben definita, che si chiama *Bl. psenes*. L'antodio di *Ficus carica* costituisce un albergo ideale per la riproduzione dell'insetto, offrendo coi suoi fiori femminili addirittura la culla dei nuovi individui. Ed i fiori destinati a questo scopo sono precisamente quelli brevistili, nei quali ogni femmina adulta della *Blastophaga psenes* depone, attraversando lo stilo con la terebra, un ovo in ciascun ovario; talchè con lo sviluppo di quest'ovo l'ovario si trasforma in una galla ed il fiore stesso fallisce completamente il compito originariamente assegnatogli dalla sua natura vegetale, giacchè l'unico ovulo in esso contenuto viene ben presto schiacciato o comunque distrutto dalla larva. Nel *Ficus carica* la produzione dei semi rimane quindi affidata all'altra categoria di fiori femminei, quelli longistili, nei quali la femmina della *Blastophaga psenes* non può depositare l'ovo, a causa della lunghezza dello stilo; pertanto i fiori longistili rimangono integri, ma, per l'andirivieni del pronubo che ha il corpo coperto di polline prelevato dai fiori maschili, gli stimmi dei fiori longistili vengono impollinati.

Il Longo studiò la struttura degli ovuli nei vari rappresentanti della

specie ed il percorso del tubetto pollinico, rilevando che gli ovuli sono sprovvisti di micropilo e che in conseguenza la penetrazione del tubetto pollinico è del tipo basigamo aporogamo. Tutti questi dettagli, concernenti la struttura, la disposizione dei fiori negli antodi, la possibilità o meno della loro evoluzione in semi e così via, hanno avuto, nella storia di questo interessante soggetto botanico, un solo obbiettivo dominante: quello di giungere alla esatta interpretazione sistematica del fico domestico, del caprifico e del fico selvatico e dei rapporti genetici che fra essi intercorrono. Che cosa sono, invero nell'ambito della specie, queste tre forme, sotto le quali si presenta ai nostri occhi la specie, delle quali tuttavia una e cioè il fico domestico, sovrasta sulle altre per l'interesse più che millenario, di cui l'uomo l'ha fatta oggetto, a causa dei suoi prodotti squisitamente alimentari?

Vi fu chi sentenziò che il fico domestico è il discendente del caprifico; discendente che si è differenziato dall'antenato, acquistando un « habitus » decisamente arboreo, una forma nelle lamine fogliari meno profondamente lobata, una succolenza e carnosità nei siconi, per cui appunto diventano mangerecci, caratteri tutti che mancano nel caprifico; e ciò in correlazione colla presenza, negli antodi, di soli fiori longistili, i cui ovari non vengono mai trasformati in galle. A questa trasformazione del caprifico in fico domestico si ammette che non debba essere rimasta estranea l'influenza del clima, accanto alla selezione ed alla coltivazione fattane dall'uomo; il clima, in particolare, avrebbe influito modificando il numero e la qualità dei cicli di antodi.

Come si vede, sarebbe stata una ben grandiosa metamorfosi, avvenuta nel corso dei millenni, da una particolare discendenza del caprifico sotto l'azione dell'uomo e del clima, mentre tutta la rimanente discendenza avrebbe conservato i caratteri originari così come furono abbozzati nella prima elaborazione della specie, e si sarebbe conservata intatta fino a noi, per permettere ai tardi discendenti di Adamo di formulare siffatta ipotesi. Ora non è possibile non vedere in questa ipotesi la suggestione o meglio il preconconcetto delle idee trasformistiche che si appoggiano sul sofisma che sorge nella mente dell'uomo tutte le volte che la sua attenzione viene richiamata dalla esistenza in Natura di due cose abbastanza simili: l'idea cioè che in tal caso l'una debba essere derivata dall'altra. In quanto al fico selvatico va ricordato in primo luogo che esso non va confuso col caprifico; nel fico selvatico la cosa più significativa è che si ritrovano, tanto negli organi vegetativi che negli antodi, caratteri sia del caprifico che del domestico. Vi fu perfino chi credette di riscontrare nel fico selvatico una regolare successione degli antodi, quale si palesa nel caprifico e nel domestico, distinguibile nei tre cicli di cui abbiamo sopra parlato. Si osserverebbe cioè, nei primi antodi o fioroni, presenza di fiori femminili brevistili destinati a trasformarsi in galle e di fiori maschili all'orlo dell'antodio;

di fiori femminili longistili capaci di esser fecondati e di dar luogo a semi normali, nel ciclo successivo; e finalmente, di nuovo, presenza di fiori femminili galligeni nei cratiri. L'inesattezza di queste osservazioni fu messa in luce dal LONGO, il quale osservò che la deposizione delle ova nei cratiri ad opera delle femmine di *Blastophaga* non potrebbe aver luogo se non dopo il lungo intervallo rappresentato dalla fase dei forniti, cioè dei fiori longistili, durante il quale l'insetto non avrebbe dove albergare. A parte questa obbiezione ed a parte anche l'ipotetica regolare successione delle forme, è però un fatto che il fico selvatico è veramente qualche cosa d'intermedio fra il domestico ed il caprifico. Ciò fece pensare che il selvatico, anzichè il caprifico, costituisse veramente il progenitore, sia del fico domestico che del caprifico stesso, fosse cioè l'« Urfeige » degli AA. tedeschi e degli altri evoluzionisti trasformisti, sempre abbacinati dall'idea di dare un progenitore ad ogni forma vivente e di mettere in moto, per spiegarne la genesi, il meccanismo della selezione naturale, dell'adattamento all'ambiente ecc. Ma anche contro questa supposizione insorsero, sia il LONGO che altri studiosi. L'esperienza, infatti, dimostra che dai semi del domestico nascono sia individui del tutto simili a caprifici, sia piante simili al fico domestico e più o meno varianti in questo o quel carattere: mai però nascono soggetti interamente intermedi, nei quali la distribuzione dei fiori brevistili e longistili sia coordinata con quella dei cicli di antodi. In altri termini, questo fico selvatico non avrebbe nulla di stabile, come sarebbe legittimamente da aspettarsi da un vero « Urfeige » cioè da un capostipite degno di questo nome. La verità è che il fico selvatico è una forma che nasce spontaneamente, molto visibilmente per disseminazione ornitofila endozoica, da semi cioè provenienti da domestici caprificati, forniti di buona polpa, ingerita da merli od altri uccelli ed abbandonati cogli escrementi sulle rocce, sui ruderi, sui vecchi muri, che sono appunto le stazioni preferite dalla pianta.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze, cui ha contribuito colle sue ricerche il LONGO, si deve concludere pertanto che fico domestico e caprifico sono due realtà naturali, della cui esistenza l'uomo non può che prendere atto, restando completamente gratuita l'idea della derivazione dell'uno dall'altro. Su questa base ideologica, infatti, si potrebbe con pari ragione sostenere che il caprifico (che, come sopra ho ricordato, da taluni viene confuso col fico selvatico) sia derivato dal domestico, per un processo di involuzione o degenerazione di qualche stirpe determinata. Che il fico domestico, d'altra parte, sia una realtà naturale pari a qualsiasi altra specie o entità sistematica naturale, è provato dalla remota antichità dell'uso fattone dall'uomo. Testimonianze della conoscenza del fico domestico troviamo fin nei più antichi monumenti pervenuti fino a noi, riferibili ai primordi dell'umanità civile attuale. Una di tali testimonianze è, ad es., un disegno trovato nella piramide di GIZET, in Egitto, rappresentante dei fichi,

disegno che, secondo quel che riferisce DE CANDOLLE, avrebbe la bellezza di 2000 anni avanti l'era volgare. A loro volta reperti paleontologici, consistenti in impronte fogliari, riferibili a piante del genere *Ficus*, si rinven- gono fin dal Cretacico superiore (Cenomaniano), ma si tratta di forme non riferibili alla specie *Ficus carica*. Questa invece, secondo lo ZEILLER, è senza alcun dubbio riconoscibile in certi tufi quaternari del bacino parigino. Adunque i dati paleontologici indicano che *Ficus carica* è una specie, nel- l'ambito del genere, relativamente giovane, mentre quelli archeologici la indicano come una delle più antiche conosciute dall'uomo. Sarebbe d'altra parte assai strano pensare che l'umanità nei suoi primi passi verso la recognizione della natura che la circondava, formasse oggetto della sua attenzione una pianta che non offriva alcuna utilità, quale il caprifico. Tutto adunque convince che il problema della origine del fico domestico, ossia dell'albero insignito dei caratteri gentili, per i quali doveva riuscire tanto utile all'umanità sopravveniente, non è diverso da quello che contem- pla l'origine di qualsiasi altra specie di pianta utile, quale il grano e gli altri cereali, l'olivo, la vite, il sesamo, ed altre che sono sorte con l'uomo e per l'uomo. L'influenza esercitata da una umanità, divenuta capace di intervenire intelligentemente nella regolazione dei fenomeni della vita vege- tale, si è tradotta in un'azione conservatrice, a sfondo egoistico, di un bene già esistente in Natura o, se si vuole, anche esaltatrice dei caratteri di un siffatto bene, senza però che sia necessario ammettere una qualsiasi deter- minazione nella formazione dell'una o dell'altra realtà. Pertanto ben a ragione fico domestico e caprifico sono considerati dai sistematici moderni e dal Longo con essi, come due varietà abbastanza ben caratterizzate, nel- l'ambito della specie, vale a dire come due entità sistematiche naturali. In quanto appartenenti alla medesima specie gl'individui del caprifico e del domestico sono interfecondabili; ma poichè si tratta appunto di due varietà sistematiche, i prodotti della reciproca fecondazione vanno riguar- dati come ibridi, ibridi cioè intraspecifici. Tale sarebbe, invero, la interpre- tazione più vicina alla realtà per quel che concerne il fico selvatico, inter- pretazione alla quale il Longo portò il suo contributo. Si ammette infatti che il carattere fiore longistilo, proprio della varietà domestica, sia allelo- morfo e recessivo, come più recente, rispetto al carattere fiore brevistilo, più arcaico e quindi dominante. Pertanto la discendenza proveniente da ogni connubio di domestico con caprifico o viceversa (quest'ultima combinazione però più raramente, a causa della quasi mancanza di fiori maschili negli antodi del domestico) ottenuto colla normale pratica della caprificazione, dovrebbe essere costituita dal 75% di individui a fiori brevistili e dal 25% di individui a fiori longistili: e ciò è stato, invero, almeno con una certa approssimazione, confermato dalle osservazioni del Longo e di altri. È d'uopo tuttavia tener presente che le osservazioni di questi Autori non furono mosse da un intendimento genetico; inoltre all'insorgere dei caratteri in

questione potrebbero avere una parte anche le pure e semplici variazioni gemmarie, indipendentemente quindi dalla spiegazione genetica; epperò sarebbe veramente temerario pensare che in materia così strettamente biologica possa formularsi una dottrina rigidamente univoca.

Meritano inoltre particolare menzione alcuni lavori di morfologia floreale del LONGO, quali quelli che concernono il cambiamento di sesso osservato in un individuo di *Idesia polycarpa*, una rara pianta esotica, coltivata nell'Orto botanico di Pisa. Nella famiglia cui appartiene l'*Idesia* (la fam. delle Bixaceae) i fiori sono abitualmente ermafroditi; tuttavia per aborto di uno dei sessi si passa spesso a fiori unisessuali o magari alla poligamia. L'esemplare coltivato nell'Orto botanico di Pisa aveva prodotto fino al 1916 soltanto fiori staminiferi; ma nei successivi anni 1917 e 1918 il LONGO constatò una formazione di fiori pistilliferi, che diedero anche frutti partenocarpici, che tuttavia non maturarono. Non poté ulteriormente analizzare il fatto essendo la pianta venuta a morire, in seguito alla mutilazione cui fu sottoposta nel vano tentativo di sperimentare se le cause del singolare fenomeno potevano attribuirsi ad azioni traumatiche, come quelle inerenti alla normale potatura. Anche in un esemplare di *Araucaria Bidwillii* coltivato nell'Orto Botanico di Napoli, ritenuto esclusivamente carpellifero e quindi sterile, il LONGO, come già precedentemente aveva osservato il CAVARA, rilevò nell'anno 1930 la presenza di semi perfettamente abboniti; ma, a differenza del CAVARA, che spiegò il fatto ammettendo la possibilità di una impollinazione anemofila a distanza, il LONGO poté dimostrare la formazione di fiori polliniferi nello stesso esemplare, che pertanto era diventato monoico, sia pure dopo un lungo intervallo di tempo.

Giungiamo così al periodo napoletano della carriera del LONGO, periodo che ha inizio dall'anno 1929. Venuto nella metropoli meridionale alla direzione del più grande Giardino botanico d'Italia, dove tradizione, ambiente, clima, pubblica opinione, tutto stava e sta ad indicare chiaramente l'insopprimibile indirizzo applicativo della Botanica, sia pure accanto alle disinteressate ricerche di Scienza pura, Egli fu irresistibilmente trascinato in questa direzione, tanto più che proprio nell'anno precedente era stata creata nell'Orto Botanico di Napoli, per merito del CAVARA, la prima espressione tangibile di questo tradizionale spirito applicativo, vale a dire la Stazione sperimentale per le piante officinali. La verità è che tutti gli Orti botanici del mondo hanno avuto come antenati dei Giardini fondati per una finalità pratica, che fu precisamente quella di collezionare il maggior numero possibile di piante utili, sia all'agricoltura, sia specialmente alla salute umana, in quanto fornivano la materia prima per la composizione delle medicine, e sia ancora per studiare nuove piante capaci di fornire nuovi rimedi alla salute umana. Siccome i rimedi fabbricati colle piante e le piante medicinali stesse da tempo remoto eran detti «semplici», alludendo all'uso quasi istintivo che l'uomo, come l'animale, ne fa in caso di bisogno, così tali

Giardini furono detti in origine « Orti » o « Giardini dei Semplici ». Anche il progenitore dell'Orto Botanico di Napoli fu un Orto de' Semplici che fu creato nel 1662 e sorgeva alla così detta Montagnola, per le cure della Pia Casa della SS. Annunziata, a quanto ci lasciò scritto M. TENORE; mentre l'Orto Botanico vero e proprio fu fondato solo nel 1807 sotto il governo dei Borboni.

L'attività scientifica del LONGO nei 18 anni che rimase a Napoli, succedendo appunto al CAVARA nella direzione dell'Orto e della Stazione sperimentale per le piante officinali, concerne quindi quasi esclusivamente argomenti di Botanica applicata, segnatamente nel campo delle piante officinali. Ricordiamo i lavori sulla coltivazione e sui prodotti del papavero da oppio, quelli sulla canapa indiana e parecchi articoli di divulgazione comparsi qua e là su periodici scientifici o professionali. La sua attività fu prevalentemente assorbita dalle necessità della organizzazione e del funzionamento della Stazione sperimentale, ancora nascente e quindi bisognosa di molteplici attenzioni e cure. Anche l'Orto Botanico, del resto, in quel periodo di tempo, si trovava in piena crisi di sviluppo e reclamava il diuturno intervento del suo Direttore per la tutela dei suoi sacrosanti diritti. Una tappa importante nella storia del nostro grande Istituto Botanico fu la costruzione del nuovo edificio nell'interno del Giardino, non lungi dalla via Foria. L'idea di tale costruzione risale a Guglielmo GASPARRINI, che diresse l'Orto Botanico fino al 1866; essa fu ripresa e vagheggiata da Giovanni Antonio PASQUALE, ma solo nel 1917 ebbe un principio di attuazione essendo Direttore dell'Orto Botanico Fridiano CAVARA. Dovevano però passare ancora ben 15 anni per giungere ai tempi della legge speciale per Napoli ed alla istituzione dell'alto Commissario per questa Città, perchè fosse ripresa la costruzione dell'edificio, costruzione che fu completata, dopo alterne vicende, nelle quali trovossi impegnato il LONGO, nel 1933. L'attrezzatura interna fu realizzata, sempre sotto gli auspici dell'alto Commissario per la Città di Napoli, nel 1935. Nello svolgimento di questa particolare attività Biagio LONGO dimostrò ancora quella capacità organizzativa e soprattutto quella tenacia, quella pazienza, quella ostinazione nel richiamare l'interessamento delle Autorità, di cui aveva già dato prova fin dall'inizio della sua carriera a pro' dell'Istituto Botanico di Siena prima e di Pisa dopo.

Questa rassegna della produzione scientifica e dell'attività del LONGO, necessariamente sintetica, è sufficiente tuttavia a delineare quel che si potrebbe dire il profilo dell'uomo. Vi è nella produzione scientifica e negli atti pubblici del LONGO un carattere sufficiente a rivelarne la personalità. Fu Egli infatti ligio all'obiettività e schivo delle troppe parole; all'orpello della espressione preferì la verità nuda. Le sue pubblicazioni si distinguono per la concisione a volte scheletrica, ma emergono anche per la grande sincerità ed onestà dei risultati, che perciò sono sempre importanti anche quando appaiono modesti. Forse una consumata esperienza del mondo e

degli uomini accentuava in Lui quella riservatezza e quel tanto di partigiano che si nasconde sempre in ogni « *Animal politicum* ». Egli pertanto sostenne fiere lotte, ma fu pure circondato da molte e sincere amicizie, e seppe trionfare in molte occasioni difficili. In suo onore da Colleghi botanici sono stati denominati due nuovi generi di piante (*Longoa* e *Longopsis*), due nuove specie (*Ascospora Longi* e *Polystachya Longi*) ed una varietà nuova (*Schyzophyllum commune*, var. *Longi*). Ebbe affidati numerosi incarichi di pubblico interesse; a Napoli, ad es., quello della collaborazione alla organizzazione della Mostra triennale delle Terre d'Oltremare per la parte riguardante i Giardini ed i prodotti coloniali; ed all'Estero, e precisamente in Argentina, dove fu chiamato nel 1935, per invito dell'Istituto Argentino di Cultura italiana a tenere un ciclo di conferenze in quelle Università. La produzione scientifica del Longo costituisce, nel suo complesso, un importante contributo pazientemente costruttivo, al progresso della nostra Scienza. Indubbiamente la Scuola, i Maestri ed il conseguente antagonismo, latente od aperto che questi ingenerano fra gli studiosi costituiscono il prezzo di questo progresso, in quanto garantiscono la necessaria disciplina, l'organizzazione, il metodo e talora anche lo stimolo al lavoro scientifico; e ciò malgrado i fatti dimostrino perentoriamente che la sostanza scientifica e la tecnica del progresso maturano preferibilmente *ex abrupto* per le idee creative nate spontaneamente nel cervello di uomini talora anche estranei alla Scienza ufficiale, anziché per la lenta elaborazione della ricerca sistematica di Laboratorio. Questa può fornire tutt'al più lo spunto a nuove idee o a nuove associazioni d'idee od alla dilatazione di vecchie idee e pertanto non si può negare la benemerenzia dei singoli parziali contributi, modesti o vistosi, diretti o più spesso assai indiretti, che la Scienza porta al progresso del vivere civile.

Per tal via, anche il dominio della Botanica moderna si è oggi enormemente dilatato in estensione e profondità, arricchendosi di nuovi argomenti di studio prima insospettati o solo appena intravisti, che si sono aggiunti agli antichi e classici soggetti di ricerca, rimasti sempre aperti alla indagine delle nuove generazioni. La conoscenza delle piante rimane ancor oggi il compito fondamentale della Botanica moderna; ma questo compito viene oggi svolto battendo nuove brillanti strade. Così la Sistematica, ossia la « *Dispositio et Denominatio* » tanto care ai nostri Maestri di un secolo fa, è pure oggi più che mai oggetto dell'attenzione dei Botanici, i quali però oggi si servono dell'Anatomia, della Cariologia, della Genetica, della Chimica fisiologica, della Microchimica, tutti rami della Biologia che mettono in luce particolari e minuzie sempre più reconditi, ma preziosi ai fini di una ricostruzione razionale dei fenomeni della vita vegetale. E la scuola botanica biologica, cui accennavo in principio, che in Italia ebbe Maestri come Federico DELPINO, ed i cui cultori ancora all'inizio di questo nostro secolo quasi disdegnavano l'uso del Microscopio e guardavano con sospetto

l'ingerenza della Chimica e della Fisica nello studio delle piante, rimane ancor oggi più che mai attuale ed efficiente, colle sue direttive finalistiche e teleologiche; finalismo e teleologia sono infatti gli aspetti ideologici che distinguono i fenomeni della vita da tutti gli altri fenomeni naturali, che abitualmente noi teniamo distinti relegandoli, forse a torto, nel mondo inorganico non vivente, nel mondo fisico e chimico. Le scuole di mezzo secolo fa ci sembrano oggi e sono in realtà largamente superate, perchè nuovi orizzonti si sono profilati all'ansia sempre affannosa di sapere, alla bramosia sempre più insaziata di strappare i segreti della Natura e di sottoporre al controllo dell'uomo le forze che in essa dominano. Cinquant'anni fa una eletta schiera di studiosi, fra i quali era il Nostro, si affannava attorno al comune microscopio, che proprio allora veniva corredato degli obbiettivi apocromatici ad immersione omogenea, che rappresentavano il più alto perfezionamento, permettendo ingrandimenti fino a 1200-1500 diametri. E ciò nell'intento di scoprire nuovi dettagli e di capire qualche cosa di più di quella *struttura cellulare* che, nelle piante come negli animali, sembrava ormai la base insostituibile, il fondamento immutabile di ogni ulteriore conoscenza biologica. Oggi una schiera altrettanto distinta di ricercatori, purtroppo ancora molto ristretta, ma con la stessa ansia, con lo stesso entusiasmo si affanna attorno al microscopio elettronico, che ci permette di spingere lo sguardo fino alla recognizione di oggetti estremamente piccoli che si misurano cioè a millesimi di millesimi di mm.; per constatare che anche in questi oggetti estremamente piccoli, se appartengono al mondo vivente, vi è pure una struttura, una forma, cioè un modo di essere materiale e di presentarsi alla nostra attenzione tale, da suscitare immediatamente il bisogno di conoscere la ragion d'essere, la finalità, il perchè della forma e della struttura stessa. Questa è la prerogativa, almeno fino a questo momento, delle cose vive, per cui esse si distinguono dalle cose non vive; prerogativa che si palesa e si ripete con sorprendente analogia e direi quasi con monotona costanza anche nel mondo dell'ordine di grandezza che il microscopio elettronico ci ha oggi permesso di scrutare. Sicchè oggi, come cinquant'anni fa, l'indagine scientifica ci si presenta come all'inizio di una ennesima crisi di sviluppo e ci sembra di cominciare « ex novo » nei vari settori in cui essa si è letteralmente polverizzata, talora perdendo di vista la visione sintetica, l'interesse centrale della ricerca, come spesso accade nel campo biologico. Ma ciò non è che l'espressione della eterna giovinezza, vorrei quasi dire della eterna infanzia della Scienza.

Tale è il prezzo del progresso scientifico, il quale è stato possibile in passato e sarà ancora possibile in avvenire finchè vi saranno al mondo uomini capaci di soffrire di questa ansietà, di sentire questa nobile curiosità disinteressata di sapere. Il progresso scientifico infatti si alimenta, giorno per giorno, di siffatti contributi disinteressati, indiretti, apparentemente estranei a qualsiasi utilità immediata, simili alle fondamenta di un grande

edificio destinate a reggere il tutto, ma a rimanere nascoste. Biagio Longo fu uno di questi uomini; fu uno studioso coscienzioso, tenace, paziente, disciplinato, ligio alla sua scuola ed ai suoi metodi. Alla sua memoria noi oggi mandiamo il nostro saluto riconoscente e la nostra ammirazione; perchè Egli servì la Scienza col meglio delle Sue forze e della sua intelligenza e col diuturno interessamento alla efficienza ed all'attività dei tre importanti Istituti botanici d'Italia che ebbero la sorte di averlo a capo, in uno dei periodi più fecondi che abbia avuto la Storia della Botanica.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

- Prima contribuzione alla Flora della Valle del Lao.* « Malpighia » vol. VII, 1893.
Seconda contribuzione alla Flora della Valle del Lao. Boll. della Soc. Bot. Ital., 1894.
Contributo allo studio della mucillagine delle Cactee. Boll. della Soc. Bot. Ital., 1896.
Contributo allo studio degli idioblasti muciferi delle Cactee. Ann. del R. Istit. Bot. di Roma, vol. VII, 1897.
Intorno ai canali delle Opunzie. Ibidem, ibidem.
Un nuovo carattere di affinità tra le Calycanthaceae e le Rosaceae desunto dall'embriologia. Rend. della Accad. dei Lincei; Cl. d. Sc. fis., matem. e nat., vol. VII, 1° sem., 1898.
Esiste cromatolisi nei nuclei normali vegetali? Ibidem, ibid., e Ann. d. R. Istit. Bot. di Roma, vol. VII, 1898.
Ancora sulla pretesa cromatolisi nei nuclei normali vegetali. Roma, 1898.
Osservazioni sulle Calycanthaceae. Ann. d. R. Istituto Bot. di Roma vol. IX, fasc. 1°, 1899.
Contribuzioni alla cromatolisi (picnosi) nei nuclei vegetali. Ibidem, vol. IX, 1899.
Sulla presenza e sulla forma degli stomi nel Cynomorium coccineum L. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. VIII, 1° sem. 1899, (in coll. col prof. R. PIROTTA).
Osservazioni e ricerche sul Cynomorium coccineum L. Ibidem, vol. IX, 1° sem. 1900, (in coll. col prof. R. PIROTTA).
Basigamia, Mesogamia, Agrogamia. Ibidem, (In coll. col prof. R. PIROTTA).
Osservazioni e ricerche sulle Cynomoriaceae Eich con considerazioni sul percorso del tubo pollinico nelle Angiosperme inferiori. Ann. d. R. Istit. Bot. Roma, vol. IX, 1900. (In coll. col prof. R. PIROTTA).
Contribuzione alla Flora Calabrese. Ibidem, vol. IX, fasc. 2°, 1901.
La Mesogamia nella comune Zucca (Cucurbita pepo L.). Rend. d. R. Accad. dei Lincei, vol. X, 1° sem., ser. 5, 1901.
Sul significato del percorso endotropico del tubetto pollinico. Ibidem, vol. X, 2° sem., Sez. 5, 1901.
Contribuzione alla conoscenza della vegetazione del bacino del fiume Lao. Ann. d. R. Istit. Bot. di Roma, Anno IX, fasc. 3°, 1902.

- Sullo sviluppo del seme nel Cynomorium coccineum L.* Ann. di Bot., vol. I, 1902. (In coll. col prof. Romualdo PIROTTA).
- Ricerche sulle Cucurbitaceae e il significato del percorso intercellulare (endotropico) del tubetto pollinico.* Mem. d. R. Accad. dei Lincei, vol. IV, Ser. 5, 1903.
- Sul Pinus nigricans Host.* Ann. di Bot., vol. I, fasc. 2°, 1903.
- Appunti sulla vegetazione di alcune località di Cala'ria Citeriore.* Ibidem, ibidem.
- La nutrizione dell'embrione dell'a Cucurbita operata per mezzo del tubetto pollinico.* Rend. d. Accad. dei Lincei, vol. XII, 1° sem., ser. 5, 1903.
- Aggiunta alla nota « La nutrizione dell'embrione della Cucurbita operata per mezzo del tubetto pollinico ».* Ann. d. Bot., vol. I, fasc. 3°, 1903.
- Intorno ad alcune Conifere Italiane.* Ibidem, vol. II, fasc. 5, 1904.
- Nuova contribuzione alla Flora Calabrese.* Ibidem, vol. II, fasc. 1°, 1904.
- Osservazioni e ricerche sulla nutriz. dell'embrione vegetale.* Ibidem, vol. II, fasc. 3°, 1905.
- Contribuzione alla Flora Calabrese. Escursione alla Sila.* Ibidem, vol. III, fasc. 1°, 1905.
- Il Pinus leucodermis Ant. in Calabria.* Ibidem, ibidem.
- Acrogamia aporogama nel Fico domestico (Ficus carica L.).* Ibidem.
- Il Pinus leucodermis Ant. in Basilicata.* Ibidem, ibidem.
- Contribuzione alla Flora della Basilicata.* Ibidem, vol. IV, fasc. 2°, 1906.
- Intorno al Pinus leucodermis Ant.* Ibidem, vol. IV, fasc. 2°, 1906.
- Ricerche sul Fico e sul Caprifico.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, vol. XV, ser. 5, 1° sem., 1907.
- Contribuzione alla Flora dei Monti del Cilento (Salernitano).* Ann. d. Bot., vol. V, fasc. 3°, 1907.
- Sul Sechium edule Sw.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, vol. XVI, 2° sem., ser. 5, fasc. 7°, 1907.
- Nuove ricerche sulla nutrizione dell'embrione vegetale.* Ibid., vol. XVI, 2° sem., ser. 5, fasc. 8°, 1907.
- Altre osservazioni sul Sechium edule Sw.* Ann. d. Bot., vol. VII, fasc. 1°, 1908.
- La poliembrionia nello Xanthoxylon Bungei Planch senza fecondazione.* Boll. della Soc. Bot. Ital., 1908.
- Osservazioni e ricerche sul Ficus carica L.* Ann. d. Bot., vol. VII, fasc. 2°, 1909.
- Ricerche sulle Impatiens.* Ibidem, vol. VIII, fasc. 2°, 1909.
- La partenocarpia del Diospyros virginiana.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, Cl. d. Sc. fis., mat. e nat., vol. XVIII, ser. 5, 1909.
- La partenocarpia nello Schinus molle L.* Ibidem, vol. XIX, ser. 5, 2° sem., 1910.
- Sulla pretesa esistenza del micropilo nel Ficus carica L.* Ann. di Botanica, vol. IX, fasc. 3°, 1911.
- Sul Ficus carica L.* Ibidem, vol. IX, fasc. 4°, 1911.
- Sulla Nespola senza noccioli.* Boll. d. Soc. Bot. It., 1911.
- Sulla pretesa esistenza delle logge ovariche nella Nespola senza noccioli.* Nuovo Giorn. Bot. it. (N. S.), vol. XIX, N. 2, 1912.
- Ancora sul Ficus carica L.* Ann. d. Bot., vol. X, fasc. 2°, 1912.

- Sur le Ficus carica en Italie.* Comptes Rendus dell' Accad. d. Sciences, Tom. CLV., n. 7, 1912.
- Di nuovo sul Ficus carica* L. Boll. d. Soc. Bot. It. 1912, pag. 212-214 e 1913, pag. 13-14; e Atti d. Soc. It. Progr. Scienze, 6^a Riunione, Genova, pag. 819-822.
- Su le « Chimere vegetali ».* Boll. d. Soc. Bot. It., 1913.
- Esiste l' Helleborus niger L. nel Senese?* Boll. d. Soc. Bot. It., 1913.
- Ricerche sulla Coriaria myrtifolia L.* Ibidem.
- Su la supposta esistenza in Toscana del Peganum Harmala L.* Ibidem.
- Ricerche sopra una varietà di Crataegus azarolus L. ad ovuli in gran parte sterili.* Nuovo Giorn. Bot. It. (N. S.), vol. XXI, n. 1, 1914.
- Note di morfologia florale.* Ann. di Bot., vol. XIII, fasc. 1^o, 1914.
- Variazioni di una gemma in una quercia.* Ibidem, ibidem.
- L' Orto e l' Istituto Botanico della R. Università di Siena.* Siena, 1915.
- Variazione del Cosmos bipinnatus Cav.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat., vol. XXIV, ser. 5, 2^o sem., 1915.
- Note di partenocarpia.* Ann. d. Bot., vol. XIV, fasc. 1^o, 1916.
- Ricerche sulla poliembrionia.* Ann. d. Bot., vol. XIV, fasc. 3^o, 1917.
- La Viola di S. Fina di S. Cimignano.* Ann. d. Bot., vol. XIV, fasc. 3^o, 1917.
- Primi risultati della seminazione del Caprifico.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, gennaio, 1918.
- Cambiamento di « sesso » nell' Idesia polycarpa Maxim.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, gennaio, 1918.
- In memoria del dott. Martino Savelli.* Boll. d. Soc. Bot. It., gennaio, 1919.
- Sopra un Pino del Monte Pisano.* Ann. d. Bot., vol. XV, fasc. 1^o, 1920.
- Per un istituendo Parco Nazionale in Calabria.* Riv. Calabr. Ann. 2^o, n. 5, maggio, 1920.
- Ricerche sul Melo « senza fiori » (Pirus apetala Munch.).* Rend. d. R. Acc. dei Lincei, novembre, 1920.
- Sulla partenocarpia.* Riv. di Biologia, vol. II, fasc. 6^o, 1920.
- Su la Vite selvatica della Maremma.* Rend. d. Accad. dei Lincei, novembre, 1921.
- Le piante più notevoli R. Orto Botanico di Pisa.* Arti Grafiche Folchietto, 1922.
- Albume o endosperma?* Riv. di Biologia, vol. IV, fasc. 2^o, 1922.
- Commemorazione del socio corrispondente Giovanui Arcangeli.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, marzo, 1922.
- La Chamaerops humilis L. a Populonia.* Boll. d. Soc. Bot. Ital., ottobre, 1922.
- Sul Pinus Magellensis dello Schouw al M. Amaro.* Ann. di Bot., vol. XVI, fasc. 2^o.
- Ulteriori osservazioni sopra una interessante pianta d' Idesia polycarpa Maxim.* Ann. d. Bot., vol. XVI, fasc. 2^o.
- Ulteriori risultati della seminazione del Caprifico.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, ottobre 1924.
- La Quercus Robur var. Virgiliana (Ten.) nel Montefeltro e l' Ephedra nebrodensis Tin. a S. Marino.* Boll. d. Soc. Bot. It., 1925, pag. 187.
- Sulla possibilità della sensibilizzazione anafilattica nei vegetali.* Rend. d. R. Accad. dei Lincei, giugno, 1925. (In collab. col prof. Antonio CESARIS-DEMEL).

Primi risultati della semina del Melo senza fiori (Pirus apetala Munch.). Rend. d. R. Accad. dei Lincei, settembre, 1926.

L' Abies alba Mill. nelle Alpi Apuane. Boll. d. Soc. Bot. It., 1926, p. 120.

Un gruppo di Taxus baccata L. nelle Alpi Apuane. Nuovo Giorn. Bot. It. (N. S), vol. XXXIV, 1927.

Sopra un cimelio della scoperta di G. B. Amici sulla fecondazione delle piante. Atti della Soc. Tosc. di Scienze nat., Mem., vol. XXXIX, 1928.

Sulla fioritura di un' Araucaria Bidwilli Hook. Atti Soc. Tosc. di Sc. Nat., Proc. Verb., vol. XXXVII, n. 5, 1928.

Sul significato biologico degli alcaloidi nelle piante. Rend. d. R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. VI, vol. X, 1929, (in coll. con C. PADERI).

Sul Pinus Cembra L. del M. Spinale. Nuovo Giorn. Bot. It., 1929.

Voci varie. nella Enciclopedia Italiana.

Le piante medicinali ed aromatiche esotiche che più si prestano alla coltivazione e utilizzazione industriale, (in coll. con BRIZI U.). Atti Parlam. Camera dei Deputati, sessione 1929-30, D'segno di Legge e Relazioni, n. 611.

Relazione per l'anno 1930 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinale annessa al R. Orto Botanico di Napoli. Bull. d. Ort. Bot. R. Univ. Nap., T. X.

Importanza della coltivazione delle piante officinali esotiche acclimatabili nel nostro Mezzogiorno. Ibidem.

Gli studi farmaceutici in Italia ed all'estero. La Farmacia, anno XIII, n. 1, gennaio 1932, p. 6.

Sulla fioritura di un esemplare di Araucaria Bidwilli Hook. nel R. Orto Botan. di Napoli. Bull. d. Orto Bot. d. R. Università di Napoli, Tomo X.

Bullettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli. Tomo X, 1931-32.

Relazione per l'anno 1931 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Off. annessa al R. Orto Botanico di Napoli. Bull. Ort. Bot. d. R. Univ. di Napoli, Tomo XI.

La coltivazione del Papavero da oppio in Italia. Ibidem.

A proposito di una recente pubblicazione sulla Flora del M. Pollino. Ibidem.

Bullettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli. T. XI, 1932-33.

La coltivazione del Papavero per estrazione dell' oppio nel Regno di Napoli. Bull. d. Orto Bot. della R. Università di Napoli, T. XII.

Ibridi d' innesto. Enciclopedia Italiana, XVIII. 1933.

Relazione per l'anno 1932 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Off. annessa al R. Orto Botanico di Napoli. Bull. Orto Bot. R. Univ. Napoli, Tomo XII.

Bullettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli. Tomo XII, 1933-34.

Relazione per l'anno 1933 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Off. annessa al R. Orto Bot. di Napoli. Bull. Orto Bot. R. Univ. di Napoli, T. XIII.

Diffusione dell' Azolla filiculoides Lam. nel Napoletano. N. G. Botanica It., vol. XLI, pp. 445-446.

Un quinquennio di sperimentazione alla Stazione per le Piante Officinali di Napoli. Rivista Italiana delle essenze dei profumi e delle Piante Officinali, Ann. XVII, N. 6, giugno, 1935.

- Sulla Canapa indiana (Cannabis indica Lam.)*. Bull. dell'Orto Bot. R. Univ. T. XIII.
- Relazione per l'anno 1934 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli*. Bull. dell'Orto Bot. d. R. Univ. Napoli, T. XIII.
- Relazione per l'anno 1935 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli*. Bull. dell'Orto Bot. d. R. Univ. di Napoli, T. XIII.
- El cultivo de Plantas medicinales*. Accademia Nacional de Medicina. Sesión publica extraordinaria en homenaje al prof. Blas LONGO (3 de octubre 1935). Buenos Aires, 1935.
- Germoglio di Opuntia sviluppatosi in un peculiare ambiente umido*. Bull. Orto Bot. d. Univ. di Napoli, 1937, T. XIV, pp. 23-26.
- Ancora sul germoglio di Opuntia sviluppatosi in ambiente umido*. Bull. Orto Bot. della Univ. di Napoli, 1938, T. XIV, pp. 49-50.
- Relazione per l'anno 1936 sulla Staz. Sper. per le P. O.* Bull. Orto Bot., T. XIV, pp. 15-27.
- Relazione per l'anno 1937 sulla Staz. Sper. per le P. O.* Idem, T. XIV, pp. 43-58.
- Relazione per l'anno 1938 sulla Staz. Sper. per le P. O.* » T. XV, pp. 1-28.
- Relazione per l'anno 1939 sulla Staz. Sper. per le P. O.* » T. XV, pp. 29-60.
- Relazione per l'anno 1940 sulla Staz. Sper. per le P. O.* » 1941, T. XV, pagg. 85-124.
- Relazione per l'anno 1941 sulla Staz. Sper. per le P. O.* » T. XVI, pp. 1-23.
- Comportamento di un individuo della seconda generazione del melo senza fiori (Pyrus Apetala Munch.)*. Boll. d. Soc. dei Naturalisti in Napoli, V. 53, pp. 69-72.
- Sulla fioritura dell'Araucaria Bidwilli Hook.* Bull. Orto Bot. d. Univ. di Napoli, 1942, T. XVI, pp. 1-7.
- Relazione per l'anno 1942 sulla Staz. Sper. per le P. O.* Bull. 1942, T. XVI, pp. 25-50.
- Incredibile, ma vero*. Rivista Italiana. Essenze e Profumi, Piante Officinali, Oli veg. Saponi, 1946, vol. 28, pag. 3.
- Amarezza*. Idem, 1946, vol. 28, pag. 1.
- Relazione riassuntiva dal 1. gennaio 1943 al 30 aprile 1947 sulla Staz. Sper. per le Piante Officinali*. Bull. Orto Bot., T. XVII, 1947.

SU UNA QUESTIONE RELATIVA ALLE STRUTTURE DISTRIBUTIVE

Nota del dott. Giorgio Trevisan, presentata dal socio corr. G. Scorza

(Adunanza del dì 3 febbraio 1951)

Sunto. — Si dà una definizione assiomatica di una struttura distributiva.

In questa nota si definisce una struttura distributiva, dotata di elementi O ed I , come un sistema algebrico con una operazione ternaria, assoggettando tale operazione a condizioni formalmente differenti da quelle già date da altri autori ¹⁾.

È noto ²⁾ il

TEOREMA: *Sia A un sistema algebrico con una operazione ternaria (a, b, c) , ed elementi O ed I per modo che*

$$1) \quad (O, a, I) = a, \quad 2) \quad (a, b, a) = a$$

$$3) \quad (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a)$$

$$4) \quad ((a, b, c), d, e) = (a, d, e), b, (c, d, e)$$

identicamente.

Se allora si definisce

$$a \vee b = (a, I, b) \quad e \quad a \wedge b = (a, O, b)$$

A è una struttura distributiva nella quale

$$(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \wedge a).$$

Ora lo stesso teorema vale se si toglie la seconda delle 3) cioè la condi-

¹⁾ La terminologia e le notazioni sono quelle usate da G. BIRKHOFF in *Lattice Theory* [American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. XXV, 1948], ad eccezione dei simboli \vee e \wedge che stanno a rappresentare l'unione e l'intersezione. Si è tradotto *lattice* con *struttura*.

²⁾ Vedere pag. 137-8 del volume citato in ¹⁾. Ivi si rimanda anche per la bibliografia.

zione $(b, a, c) = (b, c, a)$ e si sostituisce ¹⁾ alla condizione 4) la

$$5) \quad ((a, b, c), d, e) = (a, e, d), b, (c, e, d).$$

Infatti se con α, β, γ, b si indicano degli elementi di A , posto nella 5) $a = c = \alpha, d = \beta, e = \gamma$ si ricava a primo membro, tenendo conto della 2), (α, β, γ) mentre il secondo membro diventa $((\alpha, \gamma, \beta), b, (\alpha, \gamma, \beta))$ cioè, sempre per la 2), (α, γ, β) e quindi la 5) comporta che $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma, \beta)$. Ma la condizione così ricavata dalla 5) non è altro, a parte i simboli, che l'ultima delle 3).

Basta adesso tener conto di questa condizione nel secondo membro della 5) per poter scambiare tra loro gli elementi e, d ; si ricava così dalla 5) la 4).

In conclusione le nuove condizioni imposte all'operazione (a, b, c) implicano le 1), 2), 3), 4) (sono anzi equivalenti) e quindi è con esse ancora valida la tesi del teorema.

AGGIUNTA ALLE BOZZE DI STAMPA. — Dopo la presentazione di questa Nota ho potuto vedere una nota di CROISOT ²⁾ nella quale l'Autore sostituendo la 4) con la

$$(d, (a, b, c), e) = (b, (c, d, e), (a, d, e))$$

riesce ad eliminare ambedue le 3).

¹⁾ Nel Problema 64 del suo libro, BIRKHOFF dice: *Show that at least part of B can be dispensed with, if a suitable permutation of 4) is used.*

²⁾ R. CROISOT, *Axiomatique des tactiques distributives* [Canadian Journal of Mathematics, Vol. III, NO. 1, 1951].

IL TEOREMA DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE D'ORDINE $\alpha > -1$

Nota di **Fernando Bertolini** ¹⁾, presentata dal socio **M. Picone**

(Adunanza del dì 5 maggio 1951)

Sunto. — Si dimostra un teorema fondamentale sulla trasformazione di LAPLACE, facendo uso di integrali d'ordine $\alpha > -1$.

Il teorema fondamentale sulla trasformazione di LAPLACE può enunciarsi: *data una funzione $F(t)$ quasi-continua e sommabile in ogni intervallo finito contenuto nell'intervallo $[0, +\infty)$, se converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$, allora converge anche l'altro $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$, ogni qualvolta è $\text{Re } s > \text{Re } s_0$; scopo della presente nota è di dimostrare l'enunciato ottenuto dal precedente sostituendovi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \dots dt$ con l'integrale d'ordine $\alpha > -1$ $\int_0^{+\infty} \dots dt$ ²⁾.*

1. Intendo d'ora innanzi assegnata la funzione reale o complessa $F(t)$ della variabile reale t , quasi-continua e sommabile in ogni intervallo limitato contenuto nell'intervallo $[0, +\infty)$, dotata [per un certo valore $\alpha > -1$ e per un certo valore reale o complesso s_0] della trasformatata di LAPLACE

¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

²⁾ Si definisce $\int_0^{+\infty} F(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t F(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau$, con α reale e maggiore di -1 ; l'integrale $\int_0^t F(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau$ esiste (nel senso di **LEBESGUE**) per quasi tutti i valori non negativi di t , il passaggio a limite va effettuato (come sempre sottinderemo) sull'insieme J dei valori di t per cui quell'integrale esiste; se una funzione è integrabile d'ordine α nell'intervallo $[0, +\infty)$, lo è anche d'ordine $\beta > \alpha$. Cfr. **DOETSCH** *Der Faltungssatz in der Theorie der LAPLACE Transformation* (Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, s. 2, vol. 4, 1935, pp. 71-84), e **GHIZZETTI**, *Sul teorema del prodotto integrale nella teoria della trasformazione di LAPLACE* (Rendiconti del Seminario Matematico e del Politecnico di Torino, vol. 9, 1950). Con $\text{Re } s$ intendo la parte reale di s .

d'ordine α e parametro s_0 ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^2 d\tau;$$

voglio dimostrare che $F(t)$ è dotata di trasformata di LAPLACE dello stesso ordine α , e di parametro s avente parte reale maggiore di s_0 .

Posto, per semplicità di linguaggio,

$$G(t) = e^{-s_0 t} F(t) \quad , \quad \sigma = s - s_0,$$

il mio assunto è di dedurre la convergenza della variabile

$$(1.1) \quad \int_0^t e^{-\sigma \tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^2 d\tau \quad \text{per } t \rightarrow +\infty \quad , \quad (R\sigma > 0),$$

dalla convergenza della variabile

$$(1.2) \quad \int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^2 d\tau \quad \text{per } t \rightarrow +\infty.$$

Posso supporre $G(t)$ reale, potendomi sempre ridurre a questo caso per separazione del reale dall'immaginario nella (1.2).

2. In questo numero dimostro il teorema nel caso particolare $\alpha < 0$: la funzione $G(t)$ risulta integrabile d'ordine zero (cfr. nota 1), cioè integrabile impropriamente nell'intervallo $[0, \infty)$, e di conseguenza l'integrale $\int_a^b G(\tau) d\tau$ è limitato, in modulo, al variar di a e b in quell'intervallo;

questa osservazione è essenziale, e distingue questo caso da quello generale.

È necessario premettere un lemma alla dimostrazione del teorema.

Sia data una funzione $p(t)$ crescente oppure decrescente, continua nello intervallo $[0, T]$, una funzione $q(t)$ quasi-continua e sommabile nello stesso intervallo; il secondo teorema della media asserisce che

$$(2.1) \quad \int_0^t p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau = p(0) \int_0^\alpha q(\tau) d\tau + p(t) \int_\alpha^t q(\tau) d\tau,$$

per ogni t arbitrariamente dato in $(0, T]$ e per un certo α , dipendente

da t e compreso tra 0 e t . Detto $x(t)$ il minimo valore di x per cui la (2.1) è soddisfatta, e posto $x(0) = 0$, sussiste il seguente:

LEMMA I. *La funzione $x(t)$ è infercontinua nell'intervallo $[0, T]$, e quindi ivi quasi-continua.*

Dato alla variabile t un incremento Δt sull'intervallo $(0, T]$, detti Δx e Δp i corrispondenti incrementi della $x(t)$ e della $p(t)$, avremo

$$\begin{aligned} \int_0^t p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau &= p(0) \int_0^{x(t)} q(\tau) d\tau + p(t) \int_{x(t)}^t q(\tau) d\tau, \\ \int_0^{t+\Delta t} p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau &= p(0) \int_0^{x(t)+\Delta x} q(\tau) d\tau + p(t) \int_{x(t)+\Delta x}^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau + \Delta p \int_{x(t)+\Delta x}^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro

$$(2.2) \quad \int_t^{t+\Delta t} p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau = [p(0) - p(t)] \int_{x(t)}^{x(t)+\Delta x} q(\tau) d\tau + p(t) \int_t^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau + \Delta p \int_{x(t)+\Delta x}^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau;$$

ma per la sommabilità di $q(t)$ e la continuità di $p(t)$ abbiamo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta p \int_{x(t)+\Delta x}^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau = 0,$$

e la (2.2) ha per conseguenza, essendo $p(0) \neq p(t)$, la

$$(2.3) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{x(t)}^{x(t)+\Delta x} q(\tau) d\tau = 0.$$

Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{\Delta t_k\}$ infinitesima, tale che la corrispondente $\{\Delta x_k\}$ converga ad un limite negativo $-h$: per

la (2.3) avremmo $\int_{x(t)}^{x(t)-h} q(\tau) d\tau = 0$, cioè, contro la definizione di $x(t)$,

$$\int_0^t p(\tau) \cdot q(\tau) d\tau = p(0) \int_0^{x(t)-h} q(\tau) d\tau + p(t) \int_{x(t)-h}^t q(\tau) d\tau.$$

La semicontinuità inferiore di $x(t)$ per $t=0$ risulta poi da questo, che il minimo di $x(t)$ in $[0, T]$ è proprio $x(0)=0$.

Torniamo alla variabile (1.1). Preso t in J , la funzione di θ $G(\theta) \cdot \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x$ è sommabile nell'intervallo $[0, t]$ (v. preced. nota ³) e quindi la funzione di τ $\int_0^\tau G(\theta) \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta$ vi è assolutamente continua; mediante una integrazione per parti abbiamo

$$(2.4) \quad \int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^x d\tau = e^{-\sigma t} \int_0^t G(\theta) \cdot \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta + \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau} d\tau \int_0^\tau G(\theta) \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta.$$

Ma il primo termine del secondo membro della (2.4) è infinitesimo per t divergente, avendo noi supposto la convergenza della (1.2): resta da provare la convergenza del secondo termine.

Per il secondo teorema della media, esiste una funzione $x(\tau, t)$ definita per $t \in J$ e per $0 \leq \tau < t$, quasi-continua se considerata come funzione della sola τ , tale che

$$\int_0^\tau G(\theta) \cdot \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta = \int_0^{x(\tau, t)} G(\theta) d\theta + \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^x \int_{x(\tau, t)}^\tau G(\theta) d\theta,$$

ovvero, aggiungendo e togliendo il termine $\int_{x(\tau, t)}^\tau G(\theta) d\theta$,

$$\int_0^\tau G(\theta) \cdot \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta = \int_0^\tau G(\theta) d\theta + \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^x \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{-x} \right\} \int_{x(\tau, t)}^\tau G(\theta) d\theta:$$

si ha quindi per il secondo termine del secondo membro della (2.4) l'espressione

$$(2.5) \quad \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau} d\tau \int_0^\tau G(\theta) \cdot \left[1 - \frac{\theta}{t}\right]^x d\theta = \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau} d\tau \int_0^\tau G(\theta) d\theta + \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau} \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^x \cdot \psi(\tau, t) d\tau,$$

essendosi posto

$$(2.6) \quad \psi(\tau, \xi) = \begin{cases} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\tau}{\xi}\right]^{-x} \right\} \int_{x(\tau, \xi)}^\tau G(\theta) d\theta & \text{per } 0 \leq \tau < \xi, \\ 0 & \text{per } \tau \geq \xi. \end{cases}$$

Il primo membro del secondo termine della (2.5) converge per $t \rightarrow \infty$, per la osservazione fatta all'inizio e per esser $R\sigma = R_s - R_{s_0} > 0$: dimostro che il secondo termine è infinitesimo, completando così la prova del teorema nel caso $\alpha < 0$.

La $|\psi(\tau, \xi)|$ è limitata al variar di τ e ξ , mettiamo da un certo numero $H > 0$; inoltre è $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \psi(\tau, \xi) = 0$ (su J), e la funzione di τ $e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi)$ è sommabile nell'intervallo $(0, +\infty)$ uniformemente al variar di ξ in J ; conseguentemente è

$$(2.7) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) d\tau = 0 \text{ (su } J).$$

D'altronde si ha, uniformemente al variar di ξ in J ,

$$(2.8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) d\tau \text{ (su } J);$$

infatti si ha, successivamente,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau - \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) d\tau \right| &= \left| \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) \left\{ \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha - 1 \right\} d\tau \right| \leq \\ &\leq H \int_0^t e^{-R\sigma\tau} \left\{ \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha - 1 \right\} d\tau; \end{aligned}$$

ma ¹⁾ è $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-R\sigma\tau} \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-R\sigma\tau} d\tau$, ciò che prova l'asserita uniforme convergenza.

Per la (2.7), fissato un $\epsilon > 0$, v'è un ξ_0 tale che sia

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) d\tau \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per } \xi > \xi_0.$$

¹⁾ Se una funzione $f(t)$ è integrabile d'ordine zero nell'intervallo $[0, +\infty)$, ed è infinitesima all'infinito dell'ordine di $\frac{1}{t}$ almeno, allora è integrabile d'ordine $\alpha > -1$ arbitrario. Cfr. GUIZZETTI, op. cit. lemma II.

mentre in virtù della (2,8) v'è un t_0 tale che, qualunque sia ξ , è

$$\left| \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^2 d\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, \xi) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per } t > t_0;$$

quindi, detto T_0 il maggiore dei due numeri ξ_0 e t_0 , si ha

$$\left| \int_0^t e^{-\sigma\tau} \psi(\tau, t) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^2 d\tau \right| < \varepsilon,$$

per ogni $t > T_0$, come si doveva dimostrare.

3. Esaminiamo ora il caso $\alpha > 0$; questa volta non possiamo dire che $\int_0^t G(\tau) d\tau$ sia limitato al variar di t , ed in sua vece impiegheremo la variabile $\int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\beta d\tau$ con un opportuno $\beta \geq \alpha$: dimostreremo il teorema con un seguito d'integrazioni per parti, che ci permetterà di esprimere la variabile (1,1) come combinazione lineare di variabili convergenti. In questo numero espongo alcuni lemmi preliminari.

Si ponga

$$(3.1) \quad g_k(t) = \int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^k d\tau, \quad g_k(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$(3.2) \quad n = \text{massimo numero intero minore di } \alpha,$$

$$(3.3) \quad \lambda = n + 1 - \alpha. \quad (0 \leq \lambda < 1),$$

Avremo

$$(3.4) \quad g_{k+1}(t) \equiv g_k(t) + \frac{t}{k} g_k'(t) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$(3.5) \quad g_{k+1}(t) \equiv (k+1) t^{-k-1} \int_0^t \tau^k g_k(\tau) d\tau \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} g_k(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

La (3.4) si verifica mediante la (3.1), la (3.6) è conseguenza della $|g_k(t)| \leq \int_0^t |G(\tau)| d\tau$, la (3.5) si verifica moltiplicandone ambo i membri per t^{k+1} ,

derivando e tenendo conto delle (3.4) e (3.6), già stabilite.

LEMMA II. *Le funzioni $g_k(t)$ sono assolutamente continue in ogni intervallo limitato $[0, T]$. Inoltre $g_{n+1}(t)$ è limitata nell'intervallo $[0, +\infty)$.*

La cosa è banale per $k=0$, data la sommabilità di $G(t)$ in $[0, T]$. Supponiamola dimostrata per un valore generico di k , dimostriamolo per $k+1$.

Abbiamo allora $g_k(t) = p(t) - q(t)$, dove $p(t)$ e $q(t)$ sono entrambe assolutamente continue e crescenti nell'intervallo $[0, T]$, nulle per $t=0$.

Posto $\frac{P(t)}{Q(t)} = (k+1) \cdot t^{-k-1} \int_0^t \frac{\tau^k p(\tau)}{q(\tau)} d\tau$, $\frac{P(t)}{Q(t)}$ è derivabile in $(0, T]$, la sua

derivata vi è continua ed eguale a $(k+1)^2 \cdot t^{-k-2} \left\{ \frac{t^{k+1}}{k+1} \frac{p(t)}{q(t)} - \int_0^t \frac{\tau^k p(\tau)}{q(\tau)} d\tau \right\} > 0$,

per la supposta crescita di $p(t)$ e $q(t)$; inoltre $g_{k+1}(t) \equiv P(t) - Q(t)$, e, per il teorema di de l'Hospital, $\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} p(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} q(t) = 0$:

la prima affermazione è provata, la seconda segue dall'essere $n+1 \geq \alpha$ (cfr. precedente nota ²).

LEMMA III. *Se α è positivo, allora si ha:*

$$(3.7) \quad \int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n! \cdot t^{n+1}} \int_0^t \tau^n g_n(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau$$

Infatti

$$\int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \int_0^t g'_0(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \frac{\alpha}{t} \int_0^t g_0(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{\alpha-1} d\tau;$$

se è poi

$$\int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)}{k! \cdot t^{k+1}} \int_0^t \tau^k g_k(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{\alpha-k-1} d\tau$$

($k=0, 1, \dots, n-1$)

allora è

$$\begin{aligned} \int_0^t G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^\alpha d\tau &= \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)}{k! \cdot t^{k+1}} \int_0^t \tau^k g_{k+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{\alpha-k-1} d\tau + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)}{(k+1)! \cdot t^{k+1}} \int_0^t \tau^{k+1} g'_{k+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{\alpha-k-1} d\tau = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)(\alpha-k-1)}{(k+1)! \cdot t^{k+2}} \int_0^t \tau^{k+1} g_{k+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{\alpha-k-2} d\tau. \end{aligned}$$

e questo dimostra il lemma. In questi passaggi abbiamo applicato una volta la (3.4), una seconda volta abbiamo integrato per parti assumendo $g'_{h+1}(\tau)$ come fattore differenziale, valendoci della assoluta continuità di $g_{h+1}(\tau)$ e di $\tau^{h+1} \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{n-h-1}$ nell'intervallo $[0, t]$.

LEMMA IV. Se α è positivo, allora è

$$\int_0^t \tau^n g_n(\tau) d\tau = A t^{n+1} + a(t),$$

dove A è una certa costante, ed $a(t) = o(t^{n+1})$ per $t \rightarrow +\infty$.

Ricordando la convergenza di $g_{n+1}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$, questo è immediata conseguenza della (3.5).

4. Veniamo ora alla dimostrazione del teorema nel caso $\alpha > 0$. Si ha

$$(4.1) \quad \int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^n d\tau = \\ = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{\alpha}{k} k! \frac{\sigma^{n+1-k}}{t^k} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^n g_n(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{n-k} d\tau,$$

dimostriamolo per induzione. Innanzi tutto,

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^n d\tau = \int_0^t e^{-\sigma\tau} g'_0(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^n d\tau = \\ = \frac{\alpha}{t} \int_0^t e^{-\sigma\tau} g_0(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{n-1} d\tau + \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau} g_0(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^n d\tau;$$

supposto d'aver provato che

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^n d\tau = \frac{1}{h!} \sum_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} \binom{\alpha}{k} k! \frac{\sigma^{h+1-k}}{t^k} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^h g_h(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{n-h} d\tau$$

per $h = 0, 1, \dots, n-1$, otterremo, valendoci della (3.4) ed integrando per parti con $g'_{h+1}(\tau)$ per fattore differenziale (ciò che è ben lecito, essendo nello intervallo $[0, t]$ assolutamente continue sia $g_{h+1}(\tau)$ che $\tau^{h+1} \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t}\right]^{n-h}$),

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^z d\tau = \\ &= \frac{1}{(h+1)!} \sum_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} \binom{\alpha}{k} k! \frac{\sigma^{h+2-k}}{l^k} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^{h+1} g_{h+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^{z-k} d\tau + \\ &+ \frac{1}{(h+1)!} \sum_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k) k! \frac{\sigma^{h+1-k}}{l^{k+1}} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^{h+1} g_{h+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^{z-h-1} d\tau \end{aligned}$$

cioè, per semplici proprietà dei coefficienti binomiali,

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\sigma\tau} G(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^z d\tau = \\ &= \frac{1}{(h+1)!} \sum_{k=0}^{h+1} \binom{\alpha}{k} \binom{h+2}{k} k! \frac{\sigma^{h+2-k}}{l^k} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^{h+1} g_{h+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^{z-k} d\tau. \end{aligned}$$

ciò che dimostra quanto si voleva.

Ripetendo sui termini del secondo membro della (4.1) corrispondenti a $k < n+1$ la trasformazione già indicata (cioè, sostituendo in luogo di $g_n(\tau)$ la $g_{n+1}(\tau) + \frac{\tau}{n+1} g'_{n+1}(\tau)$ e quindi integrando per parti con $g'_{n+1}(\tau)$ come fattore differenziale) si ottiene una combinazione lineare di espressioni del

tipo $l^{-k} \cdot \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^{n+1} g_{n+1}(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^{z-k} d\tau$, (con $k = 0, 1, \dots, n+1$), tutte con-

vergenti per $l \rightarrow +\infty$, in quanto $g_{n+1}(\tau)$ è limitata al variare di τ — (cfr. GHIZZETTI loc. cit. lemma II, e nota ¹, pag. 5)

Nel secondo membro della (4.1) il termine corrispondente a $k = n+1$ è eguale a

$$(4.2) \quad \binom{\alpha}{n} (1-\lambda) \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^n g_n(\tau) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{l}\right]^{z-\lambda} d\tau, \text{ se } \alpha \text{ non è intero,}$$

$$(4.3) \quad (n+1) \frac{1}{l^{n+1}} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \tau^n g_n(\tau) d\tau, \text{ se invece } \alpha \text{ è intero.}$$

Dalla (4.3), ancora utilizzando la (3.4) e integrando per parti ottengo

$$e^{-\sigma t} g_{n+1}(t) + \frac{\sigma}{t^{n+1}} \int_0^t e^{-\sigma \tau} \tau^{n+1} g_{n+1}(\tau) d\tau,$$

espressione anch'essa convergente per $t \rightarrow +\infty$.

La convergenza della espressione (4.2) si dimostra con un procedimento analogo a quello impiegato al n. 2 per il caso $\alpha < 0$, e tenendo conto dei lemmi III e IV ¹⁾.

¹⁾ Mentre era in corso di stampa il presente lavoro, sono venute a conoscenza dell'ultima edizione del trattato del DÖRSCH « *Handbuch der LAPLACE-Transformation*, I » (di recentissima pubblicazione): in esso si dimostra il teorema oggetto del presente lavoro, nel solo caso $\alpha > 0$, con qualche precisazione sulla unifor-

mità della convergenza di $\int_0^t e^{-\sigma \tau} G(\tau) (1 - \frac{\tau}{t})^2 d\tau$ al variar di σ . Credo, oppor-

tuno che il presente lavoro sia pubblicato egualmente, essendo la dimostrazione del DÖRSCH e la mia notevolmente differenti, per quanto entrambe basate su integrazioni per parti: va da sé che quella del DÖRSCH può esser estesa al caso $\alpha < 0$, e che pure dalla mia si può precisare, volendo, l'uniformità della conver-

genza della variabile $\int_0^t e^{-\sigma \tau} G(\tau) (1 - \frac{\tau}{t})^2 d\tau$.

ANOMALIE CLIMATOLOGICHE OSSERVATE A NAPOLI TRA IL 1948 ED IL 1950

Nota di Eugenio Guerrieri, presentata dal socio L. Carnera

(Adunanza del dì 5 maggio 1951)

Sunto. — Con paragoni dimostrativi e statisticamente si mettono in evidenza due eccezionali anomalie climatologiche, osservate a Napoli tra gli anni 1948 e 1950, per mezzo di elementi meteorici, dedotti dalle osservazioni eseguite nella Stazione Meteorica dell'Osservatorio di Capodimonte:

A) La siccità eccezionale e persistente per nove mesi, dal novembre 1948 al luglio 1949;

B) Le straordinarie ed elevate temperature dell'aria verificatesi nella Primavera estiva e nell'Estate torrida del 1950.

I.

Siccità eccezionale e persistente per nove mesi tra il 1948 ed il 1949.

Ha universalmente impressionato la recente eccezionale e persistente deficienza pluviometrica verificatasi dall'inizio del novembre 1948 al declinare dell'estate del 1949. Nel corso di tale disastrosa anomalia climatologica sono noti i numerosi danni e le molteplici privazioni che ne sono scaturite: nella riduzione dell'acqua potabile durante la distribuzione, nei turni di distribuzione dell'energia elettrica, nell'irrigazione delle campagne, nell'impovertimento della produzione agricola, particolarmente nelle aride regioni dell'Italia meridionale, ecc.

Prima della dimostrazione dell'argomento che ci riguarda, utilizziamo i risultati delle osservazioni tratte dai registri della Stazione Meteorica dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte e diamo un rapido sguardo alle piogge ivi raccolte dal 1866 sino a tuttoggi. Dalla serie risulta un'altezza media annua di mm. 875; normalmente, le deviazioni da tale valore delle singole altezze annue non progrediscono disordinatamente, ma si manifestano riunite in gruppi, in parte positivi ed in parte negativi. Cioè, per alcuni anni consecutivi (in media da 4 a 5) risultano piogge abbondanti e per altrettanti anni piogge molto scarse; ossia gruppi di annate piovose si alternano con gruppi di annate di secchezza notevole. Rilevando le annate con piogge annue superiori od inferiori di 150 mm. rispetto alla media annua (mm. 875), sopra 83 anni risultano 11 annate abbastanza piovose contro 15 di grande siccità. Notevolissime sono le annate aride (1866, 1880, 1946), con

deficienza di pioggia, relativamente al normale, rispettivamente di mm. (304, 460, 367), e delle quali si vedrà in seguito più dettagliatamente. Anche rimarchevoli sono le annate molto piovose degli anni 1868, 1910, 1915, con altezza di acqua caduta per mm. 1292, 1329, 1404, e con divergenze dalla normale annua rispettivamente di mm. 417, 454, 529.

Però nell'ultimo quinquennio, che ci riguarda più da vicino, il raggruppamento sopra citato non si verifica: infatti, nel 1944 si è avuta pioggia abbondante (mm. 987), seguita da notevole scarsezza nell'anno successivo (mm. 733) e da notevolissima nel 1946 (mm. 508): ma nel 1947 vi fu rilevante quantità di pioggia (mm. 1021), con piogge abbondanti dal settembre 1947 al gennaio 1948. Nell'anno 1948 si notò scarsezza di pioggia (mm. 868), per nulla straordinaria giacchè l'acqua raccolta è molto vicina alla normale; ma ciò è dovuto soltanto agli abbondanti piovachi della stagione autunnale, nel settembre e nell'ottobre rispettivamente con mm. 202 e 168, mentre nell'ultimo bimestre dell'anno le piogge mensili furono *molto inferiori a quelle normali*.

La *recentissima anomalia dell'estrema deficienza di pioggia*, del cui esame presentemente ci occupiamo, è *veramente straordinaria*, e si inizia appunto con gli ultimi due mesi dell'anno 1948. Infatti nel novembre di tale anno la pioggia raccolta fu soltanto di 28 mm. contro quella che generalmente si verifica di mm. 117, e nel dicembre fu di mm. 23 contro la media di mm. 121; cioè negli ultimi due mesi dell'anno 1948 l'altezza della pioggia caduta è circa la quinta parte (precisamente il 22%) della normale di Capodimonte. Ma il fenomeno veramente più grave, durante la persistente e straordinaria aridità, si manifesta nei primi sette mesi del 1949, ed in particolar modo nei primi cinque mesi, mentre è noto che, nelle nostre latitudini, la massima quantità di pioggia, in corrispondenza del massimo numero dei giorni piovosi, si verifica appunto nell'inverno e nella primavera.

La dimostrazione di quanto si asserisce si rileva dai due seguenti specchietti nei quali si tiene conto tanto del *numero dei giorni piovosi*, quanto dell'*altezza della pioggia caduta*, misurata in mm. (i mesi dell'anno si rappresentano con numeri romani), dal novembre (XI) 1948 al luglio (VII) 1949.

Per maggiore evidenza della concordanza delle medie dei due fattori pluviometrici, si esibiscono separatamente i risultati medj di questi due elementi meteorologici, rilevati dallo studio del clima di Napoli, per la Stazione Meteorica di Capodimonte.

1866-1900

1901-1925

1926-1945

ALBERTI

AURINO

GUERRIERI

Indicando con N la media degli 80 anni (1866-1945) e con Δ la differenza tra i risultati ottenuti per il (1948-1949) e gli N , si ha nei due specchietti la seguente statistica.

Giorni Piovosi

(1948-49)

Mesi	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	Totale
Alberti	13.9	13.9	12.9	10.1	11.7	11.9	8.2	5.7	4.2	92.5
Aurino	13.8	14.4	12.4	12.8	12.7	11.6	8.9	6.9	2.6	96.1
Guerrieri	13.8	14.6	13.7	11.0	11.1	9.3	9.7	4.6	2.1	89.9
N	14	14	13	11	12	11	9	6	3	93
(1948-1949)	5	3	8	1	7	3	7	3	4	41
Δ	-9	-11	-5	-10	-5	-8	-2	-3	+1	-52

Altezza della Pioggia (mm.)

(1948-49)

Mesi	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	Totale
Alberti	113	121	98	63	73	76	53	32	19	648
Aurino	117	120	86	84	72	72	45	47	18	661
Guerrieri	122	123	116	80	67	51	55	30	10	654
N	117	121	100	76	71	66	51	36	16	654
(1948-1949)	28	23	66	2	38	4	27	12	10	210
Δ	-89	-98	-34	-74	-33	-62	-24	-24	-6	-444

Dalla tabellina dei giorni piovosi si rileva che, nei 9 mesi tra il 1948 e il 1949, il numero di tali giorni (41) rispetto alla normalità (93) rappresenta soltanto il 44%; ossia, nello stesso intervallo di tempo, si sono verificati 52 giorni in cui, al contrario del normale, vi è stata assenza di precipitazioni. Intanto si nota che, in tutti i 9 mesi considerati, le deviazioni Δ , nel senso [(1948-1949) - N], risultano, eccetto per il luglio, tutte negative; ed è da notare ancora che i loro valori negativi sono maggiori nei mesi invernali e primaverili, allorchè la pioggia normalmente dovrebbe risultare abbastanza rilevante. È da rilevare poi la quasi coincidenza del totale dei giorni piovosi ottenuti, nei 9 mesi in considerazione, dall'ALBERTI, dallo AURINO e dal GUERRIERI (93, 96, 90) rispetto ad un decrescente numero di anni (35, 25, 20).

Ma, a prescindere dall'eccessivo difetto dei giorni piovosi, l'anormale

aridità è principalmente provata dalla straordinaria deficienza di pioggia. Anzitutto, come per i giorni piovosi, anche per l'altezza (in mm.) della pioggia raccolta a Capodimonte, i risultati rilevati dalle 3 Memorie (mm. 648, 661, 654) sono molto prossimi; e i risultati mensili sono anch'essi abbastanza vicini. Sovrabbondanti poi sono le deviazioni mensili negative del (1948-1949) rispetto alla media dell'ottantennio (N): in modo particolare, degni di massimo rilievo sono i valori negativi del novembre (-89), del dicembre (-98), del febbraio (-74) e dell'aprile (-62).

In conclusione, si può bene affermare che lo scorcio dell'anno 1948 ed i primi sette mesi successivi del 1949, per la *minima scarsezza di pioggia, prolungatasi senza interruzione per 9 mesi, è da considerarsi quale l'annata più arida constatata a Napoli per l'ottantennio (1866-1945)*.

Segnaliamo ora tra il 1866 ed il 1950 nella Stazione Meteorica dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte le piogge totali annue, sia molto sovrabbondanti sia molto deficienti, le quali scartano dalla media, in più o in meno, di oltre 200 mm. di altezza; il senso degli scostamenti Δ (pioggia annua-pioggia media) è positivo (+) per le piogge cospicue, negativo (—) per quelle molto scarse.

Anno	Δ mm.	Anno	Δ mm.	Anno	Δ mm.
1866	— 304	1889	+ 247	1931	— 226
1868	+ 417	1897	— 251	1932	— 211
1874	+ 279	1900	+ 205	1933	+ 252
1879	— 220	1910	+ 454	1936	— 224
1880	— 460	1915	+ 529	1939	+ 268
1888	— 255	1918	+ 222	1946	— 367

Se consideriamo le deviazioni negative superiori a 300 mm., cioè l'importo in meno dell'altezza della pioggia caduta a Capodimonte rispetto al normale, si nota che di tali deviazioni negli 80 anni se ne contano soltanto tre, e cioè

1866 1880 1946
— 304 — 460 — 367.

Parrebbe quindi a prima vista che la deficienza in meno non appartenga solamente ai 9 mesi compresi tra gli anni 1948 e 1949: però tale osservazione in realtà non sussiste perché

a) La rimarchevole deficienza (-444) del (1948-1949), non si riferisce ad un intero anno, ma soltanto a 9 mesi, mentre nei 3 anni suddetti essa corrisponde ad un intero anno;

b) nei mesi autunnali del 1866 la pioggia caduta è stata alquanto superiore alla normale;

c) nel 1880, le piogge primaverili, che oltrepassano le normali, si sono verificate nei mesi di aprile (106) e maggio (68), quantunque nell'anno sia caduta pioggia per un'altezza inferiore alla metà di quella normale (875);

d) l'anno 1946, per la deficienza di acqua raccolta, sembra che si approssimi alquanto ai 9 mesi aridi presi in considerazione, sebbene, dopo i primi 9 mesi del 1946, molto aridi, nei restanti 3 mesi la pioggia caduta (133, 126, 113) sia stata molto superiore a quella normale, verificandosi un complesso di mm. 372, equivalente al 74 % del totale annuo (mm. 508).

II.

La Primavera estiva e l'Estate torrida dell'anno 1950.

Dopo la straordinaria anomalia climatologica di carattere pluviometrico, dopo cioè la persistente assenza di pioggia della durata di quasi dieci mesi (1948-1949), un'altra simile, ma di carattere termico, si è verificata durante le stagioni, primaverile ed estiva, dell'anno 1950. Si darà la prova che tale annata, dalla prima decade di aprile sino all'ultima decade di settembre, fu la più calda nel periodo di 60 anni, dal 1869 al 1928; e si è costretti a limitarci soltanto a questo sessantennio giacchè per tali anni furono calcolate dallo scrivente le medie diurne e decadiche della temperatura dell'aria, dedotte dalle osservazioni eseguite nella Stazione Meteorica dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte. Precisamente, si farà una duplice dimostrazione:

A) il paragone tra le temperature medie decadiche rilevate dall'aprile al settembre del 1950 con le analoghe *normali* del su detto periodo di 60 anni;

B) si farà la statistica dei giorni estremamente caldi, ottenuti nell'anno 1950, paragonandola con quella di un altro periodo più esteso di 70 anni (1869-1938).

— A —

La seguente tabella I indica, per ciascuna decade di ogni mese, dallo aprile al settembre, le medie temperature decadiche, al decimo di grado centesimale, rispettivamente per l'anno 1950 e per il periodo (1869-1928), insieme con gli scostamenti di tali temperature, nel senso (1950-normali), tanto osservati (Δo), quanto perequati di 3 in 3 (Δp).

Per rendere più evidenti in uno sguardo sintetico i risultati inseriti nella tabella, si è costruito un primo diagramma (punteggiato), dalla prima decade di aprile alla terza decade di settembre, degli scostamenti Δo , tra

le temperature decadiche del 1950 e le corrispondenti normali; analogamente, per regolarizzare l'andamento grafico dei Δo , si è costruito il diagramma dei Δp , scostamenti perequati di 3 in 3; così risultano rimarchevoli gli scarti, $\leq 3^\circ$, in ben 5 decadi; in modo particolare quello che si riferisce alla 3^a decade di maggio, allorchè l'estate non era ancora iniziata. Egualmente rilevante si manifesta lo scostamento (+ 3°,3) della 3^a decade di agosto, quando in generale la temperatura normal-

TABELLA I.

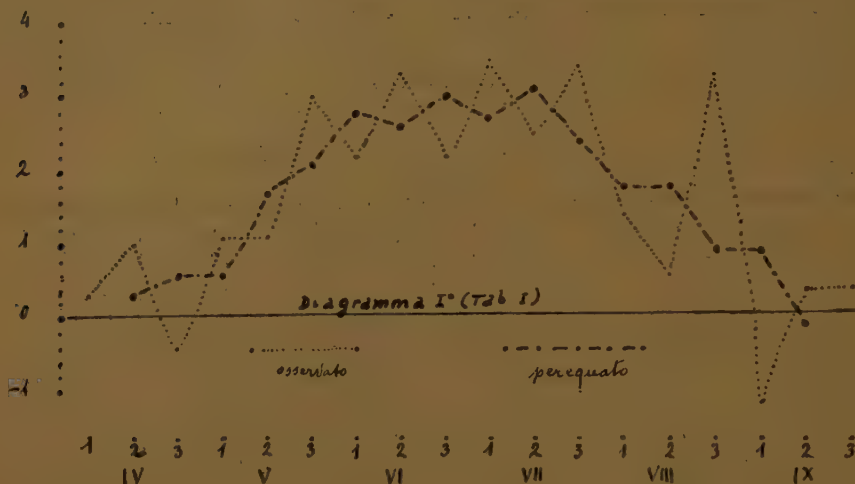
Temperature medie decadiche — Scostamenti.

Mese	Decade	1950	Normali	Δo	Δp
IV	I	12° 9	12° 6	+ 0° 3	
	II	14 .5	13 .5	+ 1 .0	+ 0° 3
	III	14 .4	14 .8	- 0 .4	+ 0 .6
V	I	17 .5	16 .4	+ 1 .1	+ 0 .6
	II	18 .8	17 .7	+ 1 .1	+ 1 .7
	III	22 .1	19 .1	+ 3 .0	+ 2 .1
VI	I	22 .8	20 .6	+ 2 .2	+ 2 .8
	II	24 .2	20 .9	+ 3 .3	+ 2 .6
	III	24 .4	22 .2	+ 2 .2	+ 3 .0
VII	I	27 .0	23 .5	+ 3 .5	+ 2 .7
	II	26 .5	24 .0	+ 2 .5	+ 3 .1
	III	27 .9	24 .5	+ 3 .4	+ 2 .4
VIII	I	25 .9	24 .5	+ 1 .4	+ 1 .8
	II	24 .9	24 .3	+ 0 .6	+ 1 .8
	III	26 .8	23 .5	+ 3 .3	+ 0 .9
IX	I	21 .5	22 .6	- 1 .1	+ 0 .9
	II	21 .7	21 .3	+ 0 .4	- 0 .1
	III	20 .3	19 .9	+ 0 .4	

mente declina col sopraggiungere delle prime piogge; come anche conspicuo si deve ritenere lo scostamento (+ 3° 3) della 2^a decade di giugno, appena all'inizio della stagione estiva. Sul numero di 18 decadi in esame, soltanto due di esse manifestano scarti leggermente negativi (- 0° 4, - 1° 1), cioè le medie temperature decadiche del 1950 sono risultate lievemente inferiori alle corrispondenti normali; ma questo si è verificato solo al principio della primavera ed alla fine dell'estate. Ciò non ostante lo scostamento (- 0° 4) è preceduto da altri due positivi, nella 1^a e nella 2^a decade di aprile con i rispettivi importi (+ 0° 3) e (+ 1° 0); e lo scarto negativo

($-1^{\circ}.1$) è seguito da altri due positivi, verificatisi nella 2^a e nella 3^a decade di settembre.

Una notevole caratteristica del diagramma (più manifesta ed accentuata di quello delle Δ_0) è una frequente alternanza di massimi e di minimi secondari, verificatesi per tutte le decadi dei mesi in esame, con



valori più pronunziati nello scorcio di aprile e nell'agosto settembre, con le differenze tra massimi e minimi da $1^{\circ}.5$ a $4^{\circ}.5$.

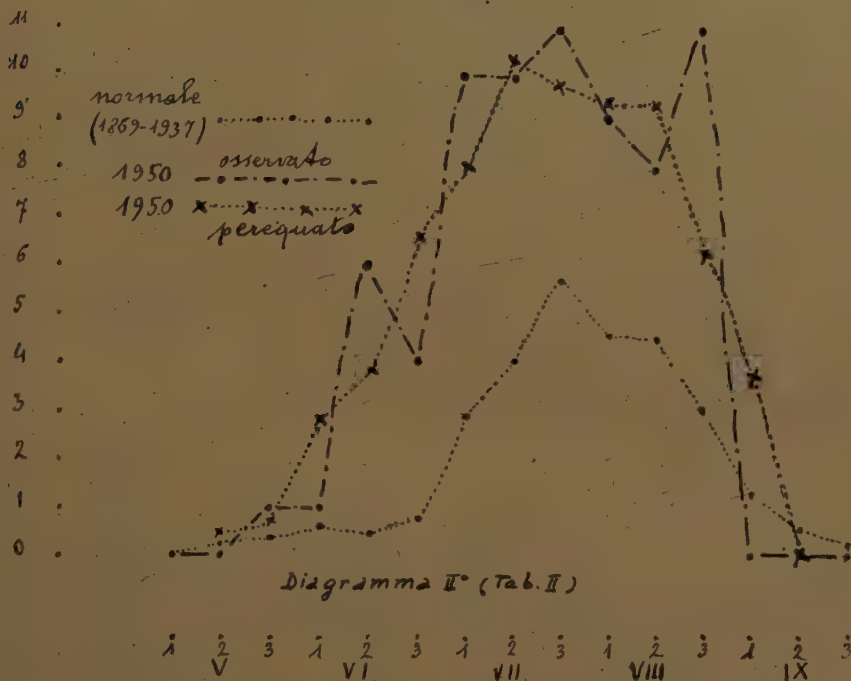
— B —

Oltre le medie decadiche delle medie temperature giornaliere, sinora accennate, a ritenere la primavera e l'estate dell'anno 1950 eccezionalmente e straordinariamente calde, valgono ancora altri elementi termici. A tal uopo si consideri la statistica dei giorni caldi verificatisi nel 1950 e si paragoni con quella del periodo (1869-1938), cioè per il settantennio di osservazioni eseguite nella Stazione Meteorica dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte. In base alle osservazioni di temperatura di questo Istituto, per il clima Partenopeo, *caldi* si possono ritenere quei giorni in cui la temperatura media diurna e la massima diurna abbiano rispettivamente raggiunto i valori di 25° e di 30° ; e conseguentemente *caldissimi* quei giorni in cui i valori di tali temperature siano stati superati.

Nelle colonne della Tabella II sono contenuti:

- 1) i mesi dell'anno, dal maggio al settembre;
- 2) le decadi relative a tali mesi;
- 3) i giorni caldi per il 1950, distinti con (O. P) secondo che sono provenienti dall'osservazione oppure dalla perequazione di 3 in 3, sino al decimo di giorno;

- 4) il totale dei giorni caldi per il periodo (1869-1938);
- 5) la media (Md) di tali giorni per ciascuna decade;
- 6) la stessa media (Mm) per ciascun mese;
- 7) gli scostamenti ($1950-Md$), cioè tra il numero dei giorni caldi per decenni verificatisi nel 1950 e la media di quelli del periodo (1869-1938);



8) gli scostamenti ($1950-Mm$), cioè tra i giorni caldi del 1950 ed i normali mensili del su detto periodo. Nella Tabella II si sono omesse le tre decadi di aprile perchè, in tale mese non si è riscontrato mai in Napoli un solo giorno caldo; mentre le temperature decadiche dell'aprile compariscono nella Tabella I perchè, quasi per tutto il mese del 1950, si sono rilevate temperature superiori a quelle normali.

Nella tabella II un semplice sguardo alle due colonne 1950 (O) ed Md fa rilevare la grande differenza in eccesso tra i giorni caldi del 1950 e la media decadica dell'intervallo (1869-1938). Maggiormente persuadono le due colonne intestate ($1950-Md$) e ($1950-Mm$): quest'ultima mette in evidenza che il mese di maggio del 1950 ha registrato un solo giorno caldo in eccesso rispetto all'anno medio; però nel giugno tale eccesso sale rapidamente da 9 a 10 giorni, nel luglio a ben 18 e nell'agosto a 16 giorni in più per il 1950. Inoltre tutti i 31 giorni del luglio furono caldi e tali 28 giorni nell'agosto: nel quadrimestre (maggio-agosto) 1950 l'eccesso dei giorni caldi sulla media dell'intervallo in esame è stato tra 44 e 45 giorni. Tra l'ultima decade di maggio e l'ultima dell'agosto del 1950 si contarono

ben settantuno giorni di forte calore, mentre nello stesso quadrimestre normalmente si ebbero in media tra 26 e 27 giorni caldi. Ciò mette in piena evidenza lo straordinario calore dallo scorcio della primavera a tutta la estate dell' anno 1950.

Con i risultati della Tabella II si sono costruiti tre diagrammi: due

TABELLA II.

Statistica dei giorni caldi, per decadi e mesi — Scostamenti.

Mese	Decade	1950		T	Md	Mm	1950	
		O	P				—Md	—Mm
V	I	0 ^a		1 ^a	0 ^a .01		-0 ^a .01	
	II	0	0 ^a .3	3	0.04	0 ^a .17	-0.04	+ 0 ^a .83
	III	1	0.7	8	0.12		+0.88	
VI	I	1	2.7	35	0.51		+0.49	
	II	6	3.7	30	0.44	1.66	+5.56	+ 9.36
	III	4	6.7	49	0.71		+3.29	
VII	I	10	8.0	205	2.97		+7.03	
	II	10	10.3	279	4.04	12.85	+5.96	+ 18.15
	III	11	10.0	403	5.84		+5.16	
VIII	I	9	9.3	315	4.57		+4.43	
	II	8	9.3	305	4.42	11.99	+3.58	+ 16.01
	III	11	6.3	207	3.00		+8.00	
IX	I	0	3.7	92	1.33		-1.33	
	II	0	0.0	37	0.54	2.03	-0.54	- 2.03
	III	0		11	0.16		-0.16	

mostrano l'andamento dei giorni caldi *osservati* e di quelli *perequati* di 3 in 3; quello inferiore, al disotto degli altri due, è il diagramma dei giorni caldi che normalmente si verificano a Capodimonte. *Notevolissimo è il distacco tra i due primi ed il terzo diagramma*: il terzo però del perequato 1950 e del normale, sono identici: il massimo calore si verifica tra la seconda decade di luglio e la seconda di agosto.

— C —

Diamo ora uno sguardo alle *massime temperature diurne*, tanto a quelle della primavera e dell'estate del 1950, quanto a quelle che normalmente si verificano a Capodimonte nelle stesse due stagioni.

Per mettere in maggiore evidenza il caldo straordinario del 1950, no-

tiamo nella Tabella III i massimi, decadici e mensili del 1950, delle medie temperature diurne; i massimi normali mensili (*N*) del periodo (1866-1937); gli scostamenti Δ nel senso (1950-*N*). Inoltre si riportano le temperature massime diurne $\geq 30^\circ$, solamente dal maggio all'agosto, giacchè nel settembre non si sono registrate massime temperature $\geq 30^\circ$. I confronti Δ , tutti positivi, hanno un significato abbastanza degno di rilievo.

Notevolissimo e veramente straordinario è il numero dei giorni nel 1950 con i massimi di temperatura diurna $\geq 30^\circ$; se ne conta un totale di ben 59, così distribuiti nei singoli mesi

maggio	giugno	luglio	agosto
1	7	27	24

Rilevante e veramente precoce è il massimo del 25 maggio; numerosi sono i massimi nel giugno, e nella quasi totalità quelli del luglio e dell'agosto; eccessivi e straordinari per Napoli sono i seguenti

4 VII	26 VII	28 VII	2 VIII	28 VIII	29 VIII	30 VIII
34.0	34.3	34.1	33.8	33.7	35.3	33.3

in particolare i tre ultimi, verificatisi negli ultimi giorni di agosto, cioè all'inizio del declinare dei calori estivi.

Da quanto si è ancora in terzo luogo rilevato, si può ritenere che tanto la seconda metà della primavera quanto l'intera estate del 1950 siano state estremamente calde.

— D —

Però, pur ritenendo che l'anno 1950 sia stato eccezionalmente caldo, nella serie degli 80 anni (1866-1945) delle *regolamentari* osservazioni meteorologiche di Capodimonte, si sono notate altre anomalie termiche degne di rilievo, e che non è inutile esporre brevemente nei singoli mesi.

TABELLA III.

Temperature massime.

Mese	Decade	1950		N	Δ	≧ 30°					
		decade	mese			Data	Valori	Data	Valori	Data	Valori
IV	I	17° 1	17° 7	17° 3	+ 0° 4	V, 25	31° 0	VII, 17	31° 5	VIII, 9	31° 7
	II	17 8				VI, 12	30 0	VII, 18	32 1	VIII, 10	32 8
	III	18 2				VI, 13	30 2	VII, 19	32 4	VIII, 11	31 8
V	I	21 9	24 0	21 8	+ 2 2	VI, 20	31 2	VII, 20	33 4	VIII, 12	31 8
	II	23 1				VI, 21	31 3	VII, 21	33 7	VIII, 13	31 0
	III	26 9				VI, 28	30 0	VII, 22	33 3	VIII, 14	30 2
VI	I	28 0	28 8	25 6	+ 3 2	VI, 29	31 6	VII, 23	32 2	VIII, 19	30 6
	II	29 0				VI, 30	31 0	VII, 24	30 4	VIII, 20	32 0
	III	29 4				VII, 1	31 0	VII, 25	31 6	VIII, 21	32 0
VII	I	31 8	31 8	28 4	+ 3 4	VII, 2	33 0	VII, 26	34 3	VIII, 22	32 6
	II	31 1				VII, 3	32 4	VII, 27	32 0	VIII, 23	32 0
	III	32 5				VII, 4	34 0	VII, 28	34 1	VIII, 24	31 6
VIII	I	30 7	31 0	28 4	+ 2 6	VII, 5	32 3	VII, 29	32 6	VIII, 25	32 0
	II	30 0				VII, 6	31 8	VII, 30	31 4	VIII, 26	31 6
	III	32 4				VII, 7	30 8	VII, 31	31 4	VIII, 27	31 8
IX	I	25 7	25 3	25 2	+ 0 1	VII, 9	32 2	VIII, 1	31 4	VIII, 28	33 7
	II	26 3				VII, 10	30 6	VIII, 2	33 8	VIII, 29	35 3
	III	23 9				VII, 13	31 2	VIII, 3	31 4	VIII, 30	33 3
						VII, 14	31 5	VIII, 6	30 0	VIII, 31	30 8
						VII, 16	30 9	VIII, 7	30 0		

Aprile. — Si ebbero, quali eccezionalissime, temperature massime diurne $> 25^{\circ}$ alle seguenti date:

1867, 25	25°.9	1926, 24	27°.4
1872, 25 e 28	25.4	1928, 28	26.3
1876, 21	25.5	1930, 28	25.7
1904, 16	26.0	1934, 30	25.3
1906, 21	25.7	1939, 28	25.6
1909, 27	26.4	1943, 23	26.7
1919, 5	26.0		

Invece, nell'aprile del 1950, in nessun giorno si riscontra una delle su esposte temperature, quantunque in 8 giorni del mese si raggiungessero massime temperature diurne $> 20^{\circ}$; però le medie decadiche del 1950 superarono alquanto le normali.

Maggio. — In tale mese si possono considerare quali eccezionali le temperature massime diurne $\geq 30^{\circ}$: in 80 anni se ne contano soltanto 13, cioè una ogni 6 o 7 anni: nel 1950 si ebbero 31° il giorno 25. Però nel 1950 si contano 11 giorni, nella 3^a decade, con temperature $> 25^{\circ}$, mentre in tutti gli altri giorni del mese esse oscillano tra 21° e 25° ; ecco tali massimi

20	25°.2	24	28°.5	28	25°.0
21	27.8	25	31.0	30	25.1
22	27.0	26	27.8	31	26.0
23	28.5	27	26.2		

Si conchiude che il maggio del 1950 è stato *abbastanza caldo*, anche nei giorni con la denominazione di *Santi di ghiaccio*, che in tale anno non si sono proprio verificati; invece si sono avute quasi nella totalità *temperature estive, anzichè primaverili*.

Giugno. — È stato *caldissimo nel 1950*, poichè *in tutti i giorni* si sono avute temperature altissime, tanto nelle medie quanto nelle massime diurne; e ciò così alla fine come al principio del mese, i cui massimi valori diurni oscillarono tra 27 e 32 gradi.

Luglio-Agosto. — Dalla statistica dei giorni caldi di questi due mesi, nonchè dei valori delle temperature medie, che si rilevano dalle esposte tabelle numeriche, si deduce che la *totalità di tale bimestre* è stato costituito da giorni *caldissimi*, con temperature massime diurne superiori a 30° , sino al massimo assoluto di $35^{\circ}.3$ (29 agosto).

Conclusione. — Con la dimostrazione numerica e comparativa, da quanto si è esposto, risulta in definitiva che la *Primavera del 1950 è stata veramente estiva e torrida l'Estate*; e tale annata si deve ritenere *una delle più calde* verificatesi nella Climatologia Partenopea nel periodo di 80 anni.

CONCEZIONI DEL MONDO ANTICHE E MODERNE

Nota del socio Giuseppe De Lorenzo

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — In questa Nota si mettono a confronto alcune concezioni del mondo antiche e moderne, per mostrare, che, se esse pur presentano molte differenze analitiche, specifiche, scientifiche, possono anche, a volte, avere grandi simiglianze sintetiche, generiche e filosofiche.

Può sembrare, a prima vista, assurdo, ridicolo, *preposter* (come dicevano i latini e dicono gli inglesi), mettere a confronto le antiche concezioni del mondo, mitiche, poetiche, filosofiche, intuite da menti somme dei passati secoli e millenni, con le moderne concezioni scientifiche, acquisite attraverso il travaglio di generazioni, mediante mirabolanti mezzi tecnici, di cui gli antichi non avrebbero potuto neanche lontanamente supporre le rapide e molteplici invenzioni, e sulla scorta di faticosissime e sottilissime ricerche chimiche, fisiche e matematiche, completamente ignote all'antichità. Pure, la cosa non è poi così strana ed assurda, come, a prima vista, può apparire.

Si rifletta anzitutto, genericamente, che il cervello umano, dal quale, in fondo, tali concezioni del mondo furono e sono escogitate, non è gran che mutato lungo il corso dei tremila o quattromila anni di storia della civiltà e della cultura umana, che noi conosciamo. Uomini sommi e menti geniali, in tutti i campi, dell'arte, del pensiero e dell'azione, ne hanno egualmente avuto tutti i tempi e tutti i luoghi: l'ero antico, il medio ed il moderno; il mondo orientale ed il mondo occidentale.

Si restringa poi specificamente lo sguardo, per non spaziarsi e prolungarsi troppo, nello spazio e nel tempo, a quel che nella storia del pensiero umano rappresenta questo estremo lembo meridionale d'Italia, con la Sicilia, tra il sesto ed il quarto secolo avanti Cristo: la scuola eleatica di ZENONE e di PARMENIDE sulla costa del mare tirreno, la scuola di PITAGORA sulla costa del mare jonico e quella di EMPEDOCLE sul mare siciliano: tre fari splendenti, che ancora irradiano sulle nostre moderne concezioni del mondo la luce dei loro pensieri. Del fulgore di tale luce avevano già piena consapevolezza i grandi poeti romani. LUCREZIO cantò, che la Sicilia, con tutte le sue bellezze e ricchezze, non aveva prodotto nulla di più illustre, di più santo e più invidiabile e caro di quell'EMPEDOCLE, dal cui petto divino sono sgorgati canti, che fanno quasi dubitare della sua ori-

giné umana. VIRGILIO ed OVIDIO fanno nei loro poemi risuonare le concezioni cosmogoniche, cosmologiche e geologiche di PITAGORA e della sua scuola. ORAZIO, che s'era educato alla scuola di EPICURO e di LUCREZIO e che non tanto si preoccupava della trascendenza metafisica e della conoscenza fisica del mondo, quanto della sua immanenza morale e del problema della caducità della vita e della ineluttabilità della morte, innanzi alla tomba, sul lido pugliese, del pitagorico ARCHYTA da Taranto, cantò, che poca terra ormai copriva il misuratore della terra, del mare e dell'innumerabile arena, e che ad ARCHYTA, mortale come tutti i viventi, nulla avesse giovato il dare la scalata alle dimore aeree e l'aver percorso con lo spirito la volta del cielo:

Te, maris et terrae numeroque carentis arenae
Mensorem, cohibent, Archyta,
Pulveris exigui prope litus parva Matinum
Munera, nec quicquam tibi prodest
Aerías temptasse domos animoque rotundum
Percurrisse polum, morituro.

Ed un altro pitagorico, FILOLAO da Crotone, doveva, come si sa, dopo circa duemila anni di empirismo aristotelico ed averroistico e di conseguente limitata concezione tolemaica, geocentrica, dell'universo, far scoccare nel cervello di COPERNICO la scintilla del suo trattato, del 1543, *De revolutionibus orbium coelestium*; dal quale scaturirono, malgrado le opposizioni aristoteliche dei dottori di Oxford e quelle tolemaiche del grande astronomo danese TYCHO BRAHE, le infiammate nuove concezioni del mondo: esposte da GIORDANO BRUNO nei suoi dialoghi de *La cena de le Ceneri* e *De l'infinito universo e mondi* e nel poema *De immenso et innumerabilibus*; da GALILEO nei suoi *Dialoghi dei massimi sistemi* e nelle sue osservazioni astronomiche; da KEPLER nei suoi commentari siderei, culminanti nelle sue famose tre leggi del moto dei corpi celesti. E tutte queste nuove vedute dell'universo, accese dalla luce delle antiche concezioni del mondo della scuola di PITAGORA, sgombrarono prime, come dice FOSCOLO, le vie del firmamento all'Anglo, che tanta ala vi stese, e hanno così gettato le basi solidissime di tutte le nostre moderne concezioni del mondo; nelle quali, malgrado alcuni tentativi modernissimi, anglobiblici, di escogitazioni sullo spazio finito, il tempo limitato ed il mondo centrifugo in espansione, ancor vigono e stanno salde le concezioni dell'infinità dello spazio, dell'eternità del tempo e della vacuità dell'universo, insegnate nella scuola di PITAGORA.

Su questa concezione dello spazio finito c'è da ricordare quel che a tal proposito scriveva SCHOPENHAUER (*Handschriftliches Nachlass*, herausg. von GRISEBACH, Bd. IV, § 376), che cioè noi siamo inclinati a considerare

limitato nello spazio il mondo: cioè l'ammasso lenticolare di stelle, di cui facciamo parte: il quale, però, diviene infinitamente piccolo, in confronto dello spazio infinitamente grande, in cui si troverebbe. Il che corrisponde all'antica concezione vedica, che solo un quarto di Brahma, ossia del mondo, ha vita, e gli altri tre quarti sono la non vita, il vuoto, il nulla; al cui confronto il mondo della vita cosmica, per quanto immenso ed innumerabile, diviene infinitamente piccolo. La dizione originale, nell'inno a PURUSA (*Rig-veda*, X, 90) è: « Un quarto di esso tutti gli esseri, tre quarti di esso l'immortalità in cielo: *pādo' asya visvá bhūtāni, tripād asyāmṛitam divi.* »

Allor che KANT nel 1755 pubblicò la sua *Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, il più grande volo, che la fantasia umana abbia compiuto attraverso lo spazio sidereo (da cui partendo, per il tramite delle lettere di LAMBERT, quarant'anni dopo, LAPLACE doveva matematicamente fondare la sua *Exposition du système du monde*), egli ben sapeva, come e quanto le ali del pensiero antico avessero contribuito al suo folle volo, e ne rendeva chiara testimonianza nella prefazione: « Io non negherò, che la teoria di LUCREZIO o del predecessore EPICURO, e di LEUCIPPO e DEMOCRITO abbia molta simiglianza con la mia: *Ich werde es also nicht in Abrede seyn, dass die Theorie des LUCREZ oder dessen Vorgängers des EPIKUR, LEUCIPP und DEMOKRIT mit der meinen viele Aehnlichkeit habe.* » La sua teoria delle due forze formatrici e trasformatrici dell'universo, l'*Attraction* e la *Zurückstossung*, dell'attrazione e repulsione, è quella stessa dell'amore e odio, φίλα καὶ νεῖκος, di EMPEDOCLE; che ancor oggi vige sotto le denominazioni di affinità chimiche, di polarità magnetiche ed elettriche, di allergie ed anafilassi organiche, attrazione gravitazionale e radiazione cosmica, etc.

Il più fedele discepolo di KANT e suo più acuto esegeta, ARTHUR SCHOPENHAUER, nella sua *Critica della filosofia kantiana* ha dimostrato, come in questa siano rinate e siano state perfezionate filosoficamente le teorie intuitive della *māyā* del *Vedānta* indiano e delle *idee* di PLATONE; che stanno all'idealismo trascendentale di KANT come le teorie astronomiche dei pitagorici FILOLAO, HIKETA, ARCHYTA ed ARISTARCO stanno a quelle di COPERNICO e dei suoi seguaci. Più diffusamente SCHOPENHAUER si è occupato di tale argomento nel primo volume dei suoi *Parerga und Paralipomena*, allorchè, trattando della filosofia presocratica, dimostra, come essa ancora mandi i suoi riverberi nelle moderne concezioni del mondo: quella eleatica di PARMENIDE, fermatasi principalmente sulla unicità e staticità del mondo della *cosa in sé*; quella di ERACLITO, considerante soprattutto la molteplicità e la perenne fluidità del mondo fenomenico; l'altra di PITAGORA, determinante la costituzione matematica ed i moti armonici delle sfere celesti ed il giro palingenetico della vita; ed infine la filosofia di EMPEDOCLE, che da un lato si allaccia a quella di PITAGORA, e dall'altro, con la

considerazione del dolore della vita e del mondo, si congiunge con le antiche intuizioni dell'India.

E nell'India vediamo, nel millennio avanti Cristo, una schiusa di intuizioni e di concezioni del mondo, analoghe a quelle contemporanee della Grecia e della Magna Grecia, se anche con un indirizzo alquanto diverso. Nel Mediterraneo, infatti, quelle concezioni si svolsero in un senso prevalentemente sintetico, geometrico, con speciale riguardo alle forme ed i moti; di cui i primi germi, sviluppatasi nella scuola di PITAGORA, hanno dato i frutti nelle teorie di COPERNICO, GALILEO, KEPLER e NEWTON, fino a raggiungere le culminazioni di KANT e LAPLACE. Nell'India, invece, le concezioni del mondo avevano e hanno un indirizzo prevalentemente analitico, algebrico, differenziale ed integrale, rivolto principalmente verso le forze e le azioni; di cui cercano di scrutare le funzioni infinitesimali, sia nell'infinitamente grande, che nell'infinitamente piccolo, sia nel macrocosmo che nel microcosmo, sia nel mondo fisico che nello psichico: ed in ciò vanno d'accordo con le più recenti vedute dinamiche e psicoanalitiche della vita e del mondo.

Nel mio breve scritto su *Le teorie di Einstein*, pubblicato nei Rendiconti di quest'Accademia del febbraio 1950, ho cercato di dimostrare, che al principio di questo secolo v'è stato piuttosto un regresso che un progresso nelle concezioni del mondo; specialmente per ciò che riguarda le categorie di tempo, di spazio e di causalità, seguendo concetti strettamente matematici, senza tener conto di quel che la mente umana aveva già, attraverso i millenni, filosoficamente intuito. Di tale forma di regresso, o di limitazione, sono principali e rinomati rappresentanti, per ciò che concerne le teorie cosmologiche e cosmogoniche, lo stesso EINSTEIN, con la sua pretesa relatività, lo HUBBLE, con la sua scoperta della fuga delle galassie, e il JEANS e l'EDDINGTON, con la teoria dell'espansione; secondo cui l'universo si espande di continuo, partendo da un punto centrale, in cui fu prima creato. Ma ecco che ora contro queste limitate concezioni è scoppiata, proprio in Inghilterra, la reazione, rappresentata dalle nuove teorie cosmogoniche, fisicomatematiche (di cui in Italia si è fatto eco Antonio Miorro), esposte da HOYLE e LITTLETON, con l'apporto di BONDI e GOLD — il cosiddetto quartetto di Cambridge —, nel libro, pubblicato nel novembre 1950, *The Nature of the Universe*. Secondo queste nuove teorie la materia cosmica, costituita quasi esclusivamente di idrogeno e diffusa nello spazio infinito allo stato di estrema rarefazione, attraverso milioni e miliardi di anni si condensa qua e là in immense nubi, ancora rarefatte ed oscure, ma tuttavia percettibili e note agli astronomi come *nebulose nere*. Per effetto della legge di attrazione, la $\varphi\lambda\lambda\alpha$ di EMPEDOCLE, l'*Attraction* di KANT, quelle nubi gradualmente si aggregano ed iniziano un movimento rotatorio, formando bolle colossali fino a 600.000 miliardi di chilometri. Col proseguire dell'aggregazione e della contrazione, in seno alla nube oscura si manifestano

innumerevoli condensazioni secondarie. Quando il diametro di una di esse si riduce a circa un milionesimo di quello iniziale, allora la temperatura interna dell'aggregato, che è andata sempre crescendo per la contrazione, giunge al punto, da innescare la trasformazione atomica dell'idrogeno in elio: così come oggi si prova a fare con la bomba ad idrogeno nei laboratori umani. Così si formano le stelle aggregate in galassie, che dopo aver consumato il loro idrogeno, in una media di tempo di una cinquantina di miliardi di anni, gradatamente si spengono, si raffreddano, muoiono, si dissolvono e scompaiono. Ma in certi casi, dicono HOYLE e LITTLETON, alcune stelle assorbono quantità anormali di idrogeno cosmico, con reazione nucleare enormemente aumentata, produzione di luce intensissima e rapidità di rotazione e di contrazione, che portano all'esplosione ed all'apparizione di una *stella nova*. In altri casi, invece, la superficie della stella resiste alla sempre crescente sollecitazione, in modo che la rotazione si accelera sempre più, fino a raggiungere i 160 miliardi di chilometri all'ora, e la contrazione fa giungere la materia a tale grado di densità, che pochi centimetri cubici pesano miliardi di tonnellate. Ed allora, con una reazione opposta, l'elio si trasforma a poco a poco in elementi sempre più pesanti, fino all'uranio ed al plutonio: si da produrre in ultimo quelle esplosioni apocalittiche, che appaiono a noi come quelle rare *stellae supernovae*; di cui una fu osservata nel 1054 da astronomi cinesi, un'altra nel 1572 da THYCHO BRAHE ed una terza nel 1604 da KEPLER. Dalle stelle supernove si svilupparono, secondo gli scienziati di Cambridge, i sistemi planetari, dei quali almeno dieci milioni si trovano nella sola Via Lattea; ed in essi almeno un milione di pianeti vi sono, in cui potrebbe essersi sviluppata una vita del genere a noi nota. Infine, i quattro di Cambridge, in accordo con quel che avevano già detto scienziati americani, come il WEIZSAECKER dell'Università di Chicago, concludono che l'infinito universo e mondi, come diceva GIORDANO BRUNO, non è che un continuo processo di formazione e di trasformazione della cosiddetta materia, nei suoi vari stati di aggregazione e di disaggregazione, nel vuoto e nel nulla.

Ma tutto ciò suona stranamente simile all'antica concezione indiana del *samsāro*, del giro dell'universo senza principio nè fine, nello spazio immenso, nel tempo immensurabile, attraverso formazioni e trasformazioni infinite di esistenze cosmiche, telluriche, inorganiche, organiche, antropiche e psichiche. « Senza principio nè fine » dice BUDDHA nel discorso II, 15, del *Samyuttakanikāyo* « è questo giro dell'universo, *samsāro*; inconoscibili sono principio e fine degli esseri, che, ciechi per inscienza, *avijjā*, e spinti dalla sete, *tanhā*, di esistenza, passano, attraverso il dolore, da vita a morte e da morte a vita: abbastanza lungamente, invero, per essere insoddisfatti di ogni forma d'esistenza; abbastanza lungamente, per rivolgersene, per redimersene. » Ed aggiunge, nel discorso II, 3, della stessa raccolta: « Ma io vi dico, che proprio in questo corpo alto otto spanne, dotato

di percezione e di coscienza, sono contenuti il mondo, il principio del mondo, la fine del mondo, e la via che porta alla fine del mondo. » Così, secondo l'antica concezione indiana, il macrocosmo si crea e si annulla nel microcosmo. Un'eco moderna di questo antico pensiero si trova nella poesia di Emily DICKINSON: « Il cervello è più ampio del cielo.... *The brain is wider than the sky...* »

Con maggiori particolari, e con figurazioni ed espressioni simili a quelle usate dai cantabrigiensi HOYLE e LITTLETON, le formazioni e trasformazioni del mondo sono esposte in altri discorsi di BUDDHA: in quelli, p. es., della raccolta lunga dei discorsi, o *Dīghanikāyo*, così genialmente tradotta e sapientemente commentata da Karl Eugen NEUMANN. Così il discorso XXVII di tale raccolta, detto *Aggaññasuttam* o discorso dei primordi; nel senso, in cui anche LUCREZIO usa tale parola e tale concetto all'inizio del suo poema:

Disserere incipiam, et rerum primordia pandam,
Unde omnis natura creet res, auctet, alatque,
Quove eadem rursum natura perempta resolvat.

Similmente, infatti, nell'*Aggaññasuttam* è detto, come, durante il corso di lunghi mutamenti, il mondo sempre di nuovo qua e là si aggrega. Quando il mondo si aggrega, allora gli esseri si condensano per lo più come lucenti e girano, splendendo di luce propria, nello spazio. Ed in altri tempi, nel corso di lunghi mutamenti, il mondo si disgrega; e gli esseri perdono il loro splendore, e si formano terre ed acque, e sostanze inorganiche ed organiche, ed esseri consci e inconsci, e generazioni e società umane, con affermazioni e negazioni di vita, miglioramenti e peggioramenti sociali ed individuali, con cicli e ritorni infiniti di esistenze, in cui la miseria e il dolore preponderano e da cui il nobile, il savio, il santo cerca lo scampo. È la visione del mondo, poeticamente espressa da LEOPARDI nel *Canto notturno di un pastore errante nell'Asia*:

E quando miro in cielo arder le stelle,
Dico fra me pensando:
A che tante facelle?
Che fa l'aria infinita, e quel profondo
Infinito seren? che vuol dir questa
Solitudine immensa? ed io che sono?
Così meco ragiono: e della stanza
Smisurata e superba,
E dell'innumerabile famiglia;
Poi di tanto adoprar, di tanti moti
D'ogni celeste, ogni terrena cosa,

Girando senza posa,
Per tornar sempre là donde son mosse;
Uso alcuno, alcun frutto
Indovinar non so
Questo io conosco e sento,
Che degli eterni giri,
Che dell'esser mio frale,
Qualche bene o contento
Avrà fors' altri: a me la vita è male.

Questo, che qui LEOPARDI esprime poeticamente, in perfetta concordanza con l'antica concezione del mondo e della vita, SCHOPENHAUER lo esprime filosoficamente, con la stessa concordanza, al principio del secondo ed alla fine del primo volume di *Die Welt als Wille und Vorstellung*: « Nello spazio infinito innumerevoli globi lucenti, intorno a ciascuno dei quali girano altri minori, illuminati, internamente caldi, coperti di crosta fredda irrigidita, su cui un rivestimento di mufte ha prodotto esseri viventi e conoscenti; — quest'è la verità empirica, il reale, il mondo. Ma, per un essere pensante è una triste situazione lo stare sopra uno di quegli innumerevoli globi, rotanti nello spazio immenso, senza sapere donde nè dove, ed essere sol uno di innumerevoli simili esseri, che si serrano, si spingono, si cruciano, sorgendo e svanendo rapidamente e senza posa, nel tempo senza principio nè fine. » Tutta questa enorme fantasmagoria è tenuta in azione solo dalla nostra *volontà* di vivere, dice SCHOPENHAUER; dalla nostra *sete* di vivere, *tanhâ*, dice BUDDHA; e noi *sitis aequa tenet vitae semper hiantis*, dice LUCREZIO. Pertanto, se un essere nobile, savio, santo, si sottrae a questo eterno giro di vita e di morte, di miseria e di dolore, rivolgendo la sua volontà, come dice SCHOPENHAUER, estinguendo la sete di vivere nel *nirvâna*, come dice BUDDHA; allora il mondo finisce, e resta per noi il nulla: che ci appare terribile, perchè contro di esso insorge la nostra natura, che è appunto la nostra volontà o sete di vivere, che siamo noi stesso e che è il mondo. Ma, viceversa, per tutti quelli, in cui la sete di vivere si è estinta e spenta, tutto questo nostro tanto reale mondo, con i suoi soli e le sue galassie, è *nulla*.

A queste concezioni moderne, ed antichisime, s'è venuto accostando anche quell'ingegno acutissimo, che è stato G. B. SHAW; il quale, partendo dalla sua concezione della *Life Force*, o forza vitale, che è, in fondo la *tanhâ*, o sete di vita, dell'antico Buddhismo e la *Volontà* di vita di SCHOPENHAUER, è giunto a mettere in dubbio il principio di causalità, inerente solo alla nostra funzione cerebrale ed intellettuale. Così, p. es., nel suo penultimo lavoro, *Farfetched Fables*, del 1949, andando oltre lo « state contenti, umana gente, al *quia* » di DANTE, e ritenendo incomprensibile, come LEOPARDI « il perchè delle cose », fa dire dall'insegnante agli allievi

della sesta classe: «Non chiedete mai perchè. Chiedete che, quando, dove, come, chi, quale; ma mai perchè. Solo i bambini, i quali credono che i loro genitori sappiano ogni cosa, chiedono perchè. Nel sesto corso voi dovrete sapere, che al perchè non si può rispondere... *you are supposed to know that why is unanswerable.*» Il curioso è di vedere, a prova della debolezza del cervello umano, che lo stesso SHAW, con tutto il suo acume e la sua dottrina, nella prefazione alle stesse *Farfetched Fables*, incappa in errori grossolani, come quello di fare risalire ad *ottomila anni fa* la religione giainista indiana: «Eight thousand years ago religion was carried to the utmost reach of the uman mind by the Indian Jainist»; quando tutti oggi sanno, che il fondatore di quella religione, il Jino MAHAVIRA, era contemporaneo del fondatore del Buddhismo, il Buddha SAKYAMUNI, e visse quindi nel sesto secolo avanti Cristo, solo duemilacinquecento anni or sono, concependo quella teoria, che lo SHAW decanta.

Questa, per ciò che riguarda il macrocosmo, *ultima linea rerumst*: direbbe ORAZIO. E se ora dal macrocosmo e dall'infinitamente grande ci rivolgiamo al microcosmo ed all'infinitamente piccolo, troviamo altre singolari coincidenze tra le nostre modernissime concezioni del mondo e quelle antichissime dell'India. Tali coincidenze si debbono, naturalmente, intendere *cum grano salis*: in quanto le antiche concezioni indiane erano intuizioni, profonde sì ma sempre e solo intuizioni, mitiche, poetiche e filosofiche, che dovevano servire da punti d'appoggio per dottrine morali, di saggezza e di salvezza; mentre le concezioni moderne sono puramente cognizioni scientifiche, fisiche, chimiche, biologiche e psichiche, ad uso della conoscenza intellettuale. Tanto più interessanti, quindi, sono le analogie e le simiglianze tra queste e quelle; che culminano nel riconoscimento, da parte di entrambe, della *impermanenza* e continua mutabilità di tutti gli elementi, siano massimi che minimi, costitutivi del mondo.

Tra questi costituenti minimi del mondo sono ora in primo piano, sulla scena scientifica, i *mesoni*: immaginati per la prima volta nel 1935 dal giovane fisico giapponese YUKAWA, convalidati nel 1937 da ANDERSON e NEDDERMEYER in California e da STREET e STEVENSON in Harvard, distinti nel 1940 dal cosiddetto gruppo di Bristol, ed infine sperimentalmente prodotti negli Stati Uniti con le nuove macchine americane, che bombardano gli elementi leggeri con particelle alfa di altissima energia. E si è giunti alla conclusione, che, al contrario degli elettroni, protoni e neutroni, ai quali era attribuito uno stato di permanenza, simile a quello prima assegnato agli atomi chimici di DALRON, i *mesoni*, invece, passano rapidissimamente dallo stato pesante, prodotto da esplosioni nucleari di particelle di raggi cosmici negli strati più alti dell'atmosfera, a quello di un mesone più leggero ed un neutrino, e quindi si disintegrano in un elettrone e due neutrini, fino ad annichilarsi in un elettrone negativo e due quanta di radiazione: così che il loro carattere fondamentale è quello della velocissima muta-

bilità e dell' assoluta impermanenza. Simile risultato si era già raggiunto nelle ricerche fisiologiche e psicologiche, che fanno capo alla scuola del fisico ERNST MACH ed alla sua opera fondamentale su *Die Analyse der Empfindungen*; in cui tutta la vita è riportata al rapidissimo succedersi di sensazioni e percezioni. Il che era stato già intravisto da HUME e da KANT e poi riassunto da LICHTENBERG nell' osservazione, che noi conosciamo solo l' esistenza delle nostre sensazioni, percezioni e rappresentazioni e dei nostri pensieri. Si dovrebbe dire « ei pensa », come si dice « ei lampeggia ». Dire *cogito* è già troppo, se lo si traduce con « io penso ». Assumere e postulare un « io » è semplicemente un bisogno pratico. « È » « Non è » sono i due capi, i due opposti poli, di cui or l' uno ed or l' altro prevale nel *samsāra*, nel giro dell' universo, senza principio e senza fine, in cui la vita è morte e la morte è vita, come aveva già detto ERACLITO e cantato LUCREZIO, II, 72 segg.:

sic rerum summa novatur
semper et inter se mortales mutua vivunt;
augescunt aliae gentes, aliae minuuntur,
inque brevi spatio mutantur saecula animantum
et quasi cursors vitae lampada tradunt.

Questa concezione della impermanenza e transitorietà di tutti i costituenti, massimi e minimi, del mondo; che è la base fondamentale dell' antica dottrina buddhista, quale fu esposta dal BUDDHA SAKYAMUNI ed è serbata fedelmente dal cosiddetto Buddismo meridionale o del piccolo veicolo, *Hīnayāna*: tale concezione è stata recentemente e concisamente esposta dall' illustre indologo Helmuth von GLASENAPP, dell' Università di Tübingen, in due saggi: *Der Buddhismus und die Lebensprobleme der Gegenwart*, Universitas, Jarg. 5, Heft 3, 1950, e *Aspekte der Wirklichkeit nach der Lehre des Theravāda*, Indische Welt, Heft 3, 1951; nel quale ultimo è riportata anche l' esposizione datane dal professore G. P. MALALASEKERA, direttore della sezione delle ricerche indoarye dell' Università di Colombo, che va per la maggiore, come il più notevole conoscitore singalese del pāli ed autore di opere importantissime, quali *The Pāli Literatur of Ceylon*, *A Dictionary of Pāli proper Names*. Ed ecco quel che essi ci dicono su questa antica concezione indiana del mondo.

Il Buddismo è in prima linea un *modo di vita*. La sua dottrina si chiama la *via di mezzo*, perchè evita gli estremi dell' idealismo, ossia della dottrina del *tutto ed uno* delle *Upanisciade*, e del materialismo positivista, e quindi sta tra i due.

BUDDHA cercò di comprendere l' essenza della personalità umana. A tale scopo egli intraprese un' analisi dell' uomo: dapprima lo scompose nella sua parte spirituale e nella corporale, e poi disciolse entrambe negli

elementi, di cui ciascuna delle due è costituita. Questi elementi sono designati come *dhamma*, o fattori di esistenza. Nel corso di tale analisi BUDDHA scoprì, che quel che noi chiamiamo « Individuo » e designiamo quindi come « Io » e « Sè », in verità non è altro che un fascio o complesso di elementi fisici e psichici. Questi *dhamma* non hanno un'essenza permanente, che li tenga uniti, ma fluiscono in continuo mutamento.

Il Buddhismo non nega l'esistenza d'una personalità *empirica*, anima od individualità; esso nega, però, decisamente l'esistenza di un'ultima immutabile realtà od eterna entità. Non esiste materia, separata dalle sue qualità, e non spirito, separato dalle sue funzioni. Quel che noi chiamiamo individualità, è un processo. Questo processo ha origine mediante la coscienza; la quale è determinata dall'« afferrare » e mossa dalla brama.

L'universo rappresenta un numero infinito di elementi distinti e transitori. Questi non si trovano in uno stato di essere statico, ma in uno stato d'incessante divenire. La cosa empirica è una costruzione, che si forma per un processo di sintesi sulla base di sensazioni. La realtà consiste di punti-momenti, che formano una catena di avvenimenti od incidenti, legati insieme dall'intelletto. Si tratta dunque solo di un'unità esistente nella nostra immaginazione, tenuta insieme dal pensiero. Spazio e tempo esistono solo come costituenti della rappresentazione.

Il formarsi dell'illusione di un mondo materiale duraturo e di persone persistenti è spiegato dal BUDDHA con la teoria « dell'origine dipendente » o *paticcasamuppāda*, spesso indicata come nesso cusale degli avvenimenti. Questa teoria stabilisce, che gli elementi, *dhamma*, o fattori di esistenza, non sono legati tra loro da una materia, che li compenetri nello spazio, e da una persistenza, che li colleghi nel tempo, ma sono invece manifestazioni determinate da leggi causali. Secondo queste leggi l'origine di ogni elemento dipende da uno o più d'uno di altri elementi. Il collegamento tra gli elementi è dato dalla loro successione. Essa riposa, considerata esattamente, sopra una dipendenza funzionale, non causale. L'intero processo viene dato e mantenuto dall'incessante attività del *kamma*, dell'atto.

La dottrina dell'inesistenza di un'anima immortale, *anattā*, non contraddice la teoria della rinascita o palingenesi: perchè la reincorporazione non è altro che la continuità dell'impulso vitale, la continuazione del processo, che si svolge nella vita attuale. La teoria dell'inesistenza di un'anima immortale non toglie la responsabilità morale, perchè le conseguenze delle buone e delle cattive azioni sono inevitabili. Questo non è determinismo, perchè il *kamma* od azione può essere mutato dalla volontà.

Il cessare del giro di nascita e morte si raggiunge, seguendo l'ottuplice sentiero, che porta all'estinzione, al *nirvāna*. Quando la sete o volontà di vita si estingue, non v'è più rinascita. L'« inscienza » od ignoranza, delle quattro nobili verità, è l'origine, senza principio nè fine, della vita,

Ma questa inscienza è distrutta dalla conoscenza. I presupposti di questa sono la disciplina morale, *sīla*, la conquista dell'equanimità o concentrazione, *samādhi*, e della sapienza, *paññā*. La rinuncia è il fondamento, per non più attaccarsi alle cose del mondo.

L'estinzione, *nirvāna* in sanscrito, *nibbāna* in pâli, è l'annientamento dell'attaccamento al mondo, della sete di vivere e delle qualità che turbano il pensiero. È la liberazione, che viene raggiunta con la sapienza e col realizzamento della verità.

In questo sunto della dottrina buddhista MULALASEKERA fissa il punto centrale del concetto dei *dhamma* od elementi o fattori d'esistenza, con la cui concatenazione vengono a formarsi l'apparente personalità ed il mondo, in essa rappresentato. Questo è il concetto, di cui il significato fondamentale per la spiegazione del mondo e la dottrina di salvezza del Buddhismo solo in questi ultimi trent'anni è stato dischiuso alla scienza occidentale dai lavori di Theodor TSCHERBATSKY, Otto ROSENBERG e Louis de la VALLÉE POUSSIN, e che non era stato ancora completamente delucidato dagli anteriori interpreti europei del Buddhismo, quali OLDENBERG, PISCHEL, BECKH, NEUMANN, GEIGER, DAHLKE, GRIMM. Siccome la parola *dhamma*, letteralmente « ciò che porta », in pâli ha già diversi significati, quali legge, dottrina, diritto, dovere, qualità, oggetto etc. non si era ancora chiaramente compreso, che nel canone pâli essa, oltre che in quel molteplice senso, è anche adoperata come termine tecnico per gli ultimi, irriducibili fattori, di cui è costituito tutto ciò, che noi empiricamente percepiamo o crediamo di percepire, dentro e fuori di noi. Siccome non si era compreso nel suo vero significato e nella sua piena portata questo concetto fondamentale della filosofia buddhistica, si poteva apprezzare l'etica e la dottrina di salvezza del BUDDHA, ma non si era consapevoli, che il Buddhismo pratico ha come fondamento teoretico una filosofia del divenire, unica nella storia spirituale della umanità; la quale, spiegando tutto quel che esiste con la cooperazione di forze momentanee, apparenti e disparenti con dipendenza funzionale, poteva fare a meno di sostanze eterne, quali materia, anima, Dio, che formano le basi di tutte le altre religioni. Le ultime ricerche hanno dimostrato, che la teoria dei *dhamma* è la base comune di tutti i sistemi buddhistici. Questo vale non solo per le scuole del *Hīnayāna*, come quelle del *Theravāda*, del *Sarvāstivāda*, etc. ma anche di quelle del *Mahāyāna*, in India e nell'estremo Oriente. Queste ultime hanno serbato la dottrina dei *dhamma* come nucleo e fondamento, ma l'hanno ampliata con una ricca soprastruttura, che viene rigettata come inutile ed ingiustificata dai seguaci delle scuole antiche. La stretta affinità, esistente tra la filosofia (non la fede ed il culto) del Piccolo e del Grande Veicolo, è messa in chiaro anche da un altro principio esposto da MALALASEKERA, che, cioè, nel Buddhismo la realtà non è plurale né unica, ma nessuna: *According to Buddhism, reality is neither plural nor one, but none*. Questa realtà

sarebbe quella di un mondo sostanziale persistente, che secondo BUDDHA non esiste. Il *Mahāyāna*, dal pensiero, che tutto quel, che è mutabile e dipendente da altro, non ha vero essere, ha sviluppato la sua dottrina, che il mondo, risultante dalla combinazione di *dhamma*, è un'ingannevole illusione. Da ciò è giunto alla conclusione, che il *samsāro* mutevole ed il *nirvāna* immutabile siano solo diversi aspetti di un superempirico assoluto, di un inconoscibile vuoto o *sūnya*. Sono speculazioni, derivate dalla teoria dei *dhamma* mutevoli, che sono, però, estranee, al *Theravāda* ed al Buddhismo antico. A ragione, perciò, sia il Grande che il Piccolo Veicolo vedono il comune principio, che unisce tutti i seguaci del sublime Svegliato nei famosi versi, in cui il discepolo ASSAJI concluse la quintessenza del Buddhismo: « Di tutte le cose originate da cause il Compiuto dice la causa — e la loro estinzione anche dice il grande asceta: *yé dharmā hētuṇaṃ tesaṃ hētuṃ Tathāgata uvāca — tēsaṃ ca yō nirōdha évamvādi mahāsramanah.* » E sul tutto aleggia la concezione fondamentale del Buddha SAKYAMUNI: che tutto il mondo è senza Ente, *anattā*, è impermanente, *anicca*, ed è dolente, *dukkha*.

In conclusione, questo rapido confronto tra le concezioni antiche e le moderne del mondo varrà, se non altro, a confermare il luminoso detto di LUCREZIO: *ita res accedent lumina rebus.*

SUI RAPPORTI FRA ACIDO ASCORBICO IDROJUGLONE E ALTRI RAPIDO RIDUCENTI
NEL MALLO DI NOCE DURANTE LA MATURAZIONE DEL FRUTTO

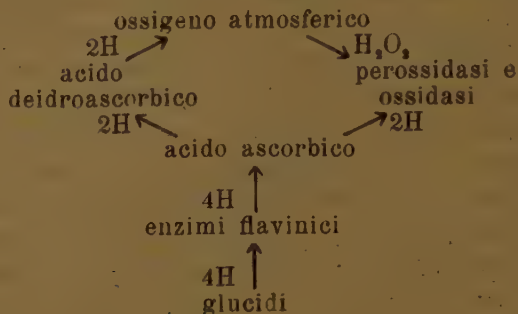
Nota del prof. Giovanni Petrosini, presentata dal socio A. De Dominicis

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — L'Autore con un metodo da lui formulato per la determinazione del potere riducente dell'idrojuglone in presenza di acido ascorbico e di altre sostanze rapido-riducenti mette in evidenza come non tutto l'alto potere riducente del mallo di noce sia da attribuire all'azione della vitamina C, ma in aliquota molto forte, che può superare un terzo del potere riducente totale, spetti anche ad altre sostanze rapido-riducenti. Fra queste importanza speciale nel mallo di noce riveste l'idrojuglone, sia per le sue forti proporzioni rispetto alle altre sostanze rapido-riducenti che accompagnano la vitamina C, sia per il suo particolare comportamento durante la differenziazione e la lignificazione dell'endocarpo del frutto.

Nel biochimismo che presiede ai processi di riduzione che caratterizzano la fase anabolica del metabolismo vegetale, specialmente localizzato nei punti di più elevata attività fisiologica, troviamo sempre presente l'acido

ascorbico, al quale viene oggi riconosciuta una specifica funzione di mobilizzatore di idrogeno attraverso il seguente schema riportato da BERSIN ¹⁾:



Come si vede, all'acido ascorbico è demandata la funzione di trasportare idrogeno da sostanze a potenziale di ossiriduzione più alto a sostanze a potenziale di ossiriduzione più basso.

Il vegetale nel quale, secondo le ricerche di NATADSE ²⁾ e HENNING e OSK ³⁾, è stato finora riscontrato uno dei più alti contenuti di acido ascorbico, paragonabile a quello stesso della *Rosa canina* — 1880 mg. % gr di sostanza fresca — ⁴⁾ e degli aghi di pino — 1660 mg. gr di sostanza fresca — ⁵⁾ e della *Viola tricolor* — 1360 mg. % gr di sostanza fresca — ⁶⁾ è il mallo di noce. Ma il potere riducente riscontrato dai predetti Autori negli estratti di mallo di noce era così elevato che poteva addirittura far pensare che non fosse da attribuire tutto quanto all'acido ascorbico.

Le notevoli modificazioni da noi introdotte ⁷⁾ nell'originario metodo di OTT ⁷⁾ resero possibile riconoscere l'esistenza ed eseguire la determinazione di sostanze dotate, come l'acido ascorbico, di potere rapido-riducente, ma differenti dall'acido ascorbico perchè non fornite della medesima attività vitaminica: sostanze vale a dire da considerare dal punto di vista esclusivamente chimico come « vitaminosimili ». Con tali modificazioni se ne può apprezzare direttamente le proporzioni attraverso il loro diverso comportamento rispetto all'azione catalitica del rame. In questo gruppo di vitaminosimili rame-resistenti, non rientrava però un'altro rapido riducente, lo idrojuglone che nelle Juglandacee accompagna sempre l'acido ascorbico e, come quest'ultimo, si presenta rame-sensibile. Sorgeva quindi il problema

¹⁾ BERSIN Th., *Kurzes Lehrbuch d. Enzimologie*. Leipzig, 1938, p. 144.

²⁾ NATADSE, *Chem. Zent.*, vol. I, p. 2210, 1938.

³⁾ HENNING e OSK. *Biochem. Zeit.*, p. 306, 1940.

⁴⁾ SIVADJIAN. *La Chimie des Vitamines*. Gauthier-Villars, 1949, p. 207.

⁵⁾ VOGEL. *Chemie und Technik der Vitamine*. Enke, Stuttgart, 1940, p. 130.

⁶⁾ PETROSINI. *Ann. Chim. Appl.*, vol. 37, 1947.

⁷⁾ OTT. *Aug. Chem.*, vol. 54, p. 170, 1941.

della determinazione dell'idrojuglone in presenza di acido ascorbico, tanto più che non esisteva neppure un metodo per la determinazione del solo idrojuglone.

Convenne per ciò, anche a scopo di controllo, mettere a punto due metodi distinti: uno, colorimetrico, per la determinazione dello idrojuglone ¹⁾, l'altro, grafico differenziale, per la determinazione del potere riducente dello idrojuglone in presenza di altri rapido-riducenti ²⁾, quale nel caso specifico, acido ascorbico e « vitaminosimili ». È stato così possibile, durante tutto l'evolvere della maturazione del frutto di *Juglans regia*, seguire nel mallo di noce il potere riducente cui dà luogo il complesso di questi tre costituenti: acido ascorbico, vitaminosimili, idrojuglone e la parte a ciascuno spettante nel determinare il potere riducente totale.

Le variazioni proporzionali fra i singoli costituenti potrebbero servire di contributo per l'interpretazione del significato biologico di questi tre costituenti.

Parte sperimentale.

Per il materiale da sottoporre ad analisi furono scelti due alberi di *Juglans regia*, esistenti negli immediati dintorni dell'Istituto: uno così detto « da seme » di età quasi secolare, l'altro innestato con varietà Sorrento, di circa 12 anni di età. I prelevamenti, a cominciare dall'11 giugno, ad una data cioè in cui la differenziazione del mallo cominciava a manifestarsi netta, proseguirono regolarmente fino al 4 ottobre a distanza di circa 10 giorni l'uno dall'altro e, per ciascuna pianta su un ramo, preliminarmente individuato, e intorno sempre alla stessa altezza.

Dal frutto portato immediatamente in laboratorio veniva isolato il mallo, e questo preparato e passato subito all'analisi, secondo la sistematica indicata nei precedenti lavori già ricordati.

I risultati sono qui appresso raccolti nella tabella n. I, nella quale il potere riducente al 2-6 diclorofenoloindofenolo viene espresso indifferentemente, poichè l'acido ascorbico e l'idrojuglone hanno il medesimo peso molecolare, in mg. di acido ascorbico e in mg. di idrojuglone.

Come abbiamo detto, lo idrojuglone è stato determinato anche a parte, mediante il nostro metodo colorimetrico e, come si vede nella tabella n. II, i valori forniti con ciascuno dei due metodi sono fra loro soddisfacentemente concordanti, per misure del genere, condotte per seguire i processi di maturazione dei tessuti in piena evoluzione.

¹⁾ PETROSINI, ESCHENA. Boll. Soc. It. Biol. Speriment., vol. XXIV, fasc. 7, 1948.

²⁾ PETROSINI, ESCHENA. Quad. della Nutr., vol. X, n. 4, 1948.

TABELLA I

V a r i e t à S O R R E N T O				P i a n t a d a S E M E			
Data di prelevamento Anno 1949	P o t e r e r i d u c e n t e			Data di prelevamento Anno 1949	P o t e r e r i d u c e n t e		
	complessivo: Ac. Asc. lib. + Ac. Asc. combi nato + vitaminosimili mg. %	delle vitaminosimili idrojoglione (meto- do grafico diffe- renziale) mg. %	Acido ascorbico reale mg. %		complessivo: Ac. Asc. lib. + Ac. Asc. combi nato + vitaminosimili mg. %	delle vitaminosimili idrojoglione (meto- do grafico diffe- renziale) mg. %	Acido ascorbico reale mg. %
11/6	1266	149	1009	11/6	918	49	790
21/6	1223	228	910	21/6	864	120	706
5/7	891	117	744	5/7	891	117	744
18/7	956	246	600	18/7	912	88	793
1/8	530	145	351	1/8	601	63	506
17/8	429	118	291	17/8	591	100	401
30/8	436	112	292	30/8	436	74	330
4/10	155	31	100	19/9	400	60	310

TABELLA II

Varietà SORRENTO			Varietà SEME		
Data di prelevamento Anno 1949	Idrojuglone mg %		Data di prelevamento Anno 1949	Idrojuglone mg %	
	metodo grafico differenziale	metodo colorimetrico		metodo grafico differenziale	metodo colorimetrico
11/6	149	160	11/6	49	55
21/6	228	210	21/6	120	106
5/7	117	120	5/7	117	124
18/7	246	235	18/7	88	90
1/8	145	135	1/8	63	57
17/8	118	100	17/8	100	105
30/8	112	125	30/8	74	68
4/10	31	22	19/9	60	57

Ecco intanto ciò che può ricavarsi da un attento esame dei valori fin qui esposti:

1°) Realmente il mallo di noce rappresenta un tessuto vegetale fra i più ricchi di acido ascorbico fra quanti finora studiati. Tuttavia, come avevamo avuto ragione di presumere, non tutto il potere riducente, che lo estratto di mallo di noce rivela al 2-6 diclorofenoloindofenolo, deve essere attribuito all'acido ascorbico. Accanto all'acido ascorbico si trova sempre in atto, almeno durante tutto il tempo della maturazione del frutto, un insieme di altri rapido-riducenti, fra i quali siamo già riusciti a identificare e a determinare il più rappresentato, che è lo idrojuglone.

2°) Ancora di più particolare da segnalare è la constatazione che l'aliquota di « vitaminosimili », idrojuglone compreso, raggiunge quasi sempre il 20%, dell'acido ascorbico presente, con tendenza a superarlo nelle varietà da seme, e oltre il 50% nella varietà Sorrento, come illustrano con chiarezza i dati della tabella III.

TABELLA III

Varietà SORRENTO			Varietà da SEME		
Data di prelevamento. Anno 1949	sostanze vitaminosimili + idrojuglone		Data di prelevamento. Anno 1949	sostanze vitaminosimili + idrojuglone	
	in % dell'Acido Ascorb. presente	in %, del potere riducente totale		in % dell'Acido Ascorb. presente	in %, del potere riducente totale
1/16	25,5	20,3	11/6	16,2	13,9
21/3	34,4	25,6	21/6	22,4	18,3
5/7	19,7	16,5	5/7	19,8	16,5
18/7	59,3	37,2	18/7	15,0	13,0
1/8	49,7	33,2	1/8	18,8	15,8
17/8	47,4	32,2	17/8	28,2	22,0
30/8	49,3	33,0	30/8	32,1	24,3
4/10	55,0	35,5	19/9	29,0	22,5

Si deve anche osservare, sul complesso dei dati finora esposti, che l'acido ascorbico nel mallo di noce va gradualmente decrescendo col progredire della maturazione, sebbene nella pianta *da seme* non molto nettamente nei primi stati di evoluzione dei tessuti del frutto, in dipendenza o forse della più lunga età della pianta, o forse di qualche particolarità connessa a possibili deviazioni biochimiche della varietà. Nei loro valori assoluti decrescono anche le « vitaminosimili »; ma crescono col progredire della maturazione le loro percentuali rispetto all'acido ascorbico e al potere riducente totale.

3°) Fra le « vitaminosimili » comportamento speciale rivela l'idrojuglone. A differenza dell'acido ascorbico e dalle altre « vitaminosimili », esso non parte dal suo massimo al momento della formazione del frutto, ma lo raggiunge nei primi stadi della maturazione in due momenti differenti, tanto nella pianta « *da seme* » quanto nella varietà « Sorrento ». sebbene in ciascun caso con valori diversi, come può osservarsi oltre che dalle tabelle precedenti anche nel seguente grafico.

Più particolarmente da notare è che i due massimi in questione assumono l'aspetto di punte, che coincidono in ambedue i casi con l'intensificarsi dell'abbassamento dell'acido ascorbico. Quale significato biologico possa attribuirsi a queste correlazioni, non è il caso di prendere per ora in considerazione, in base ai dati potuti finora ricavare. Solo sarà bene fin da ora precisare che le due punte coincidono, sebbene in date differenti per ciascuna varietà, la prima col differenziarsi dell'endocarpo, la seconda con il suo

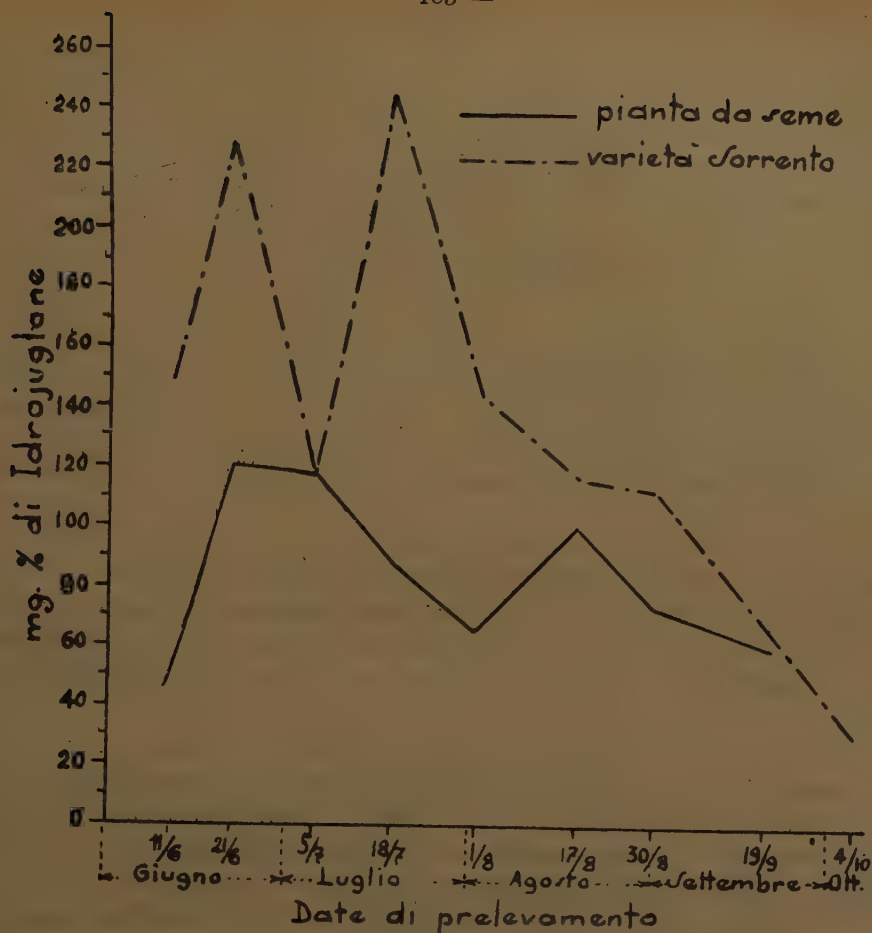


Fig. 1.

passaggio a consistenza legnosa. E tanto è meno il caso di fermarci sopra l'interpretazione di simile manifestazione, in quanto fra l'altro nulla si conosce sulle funzioni dello idrojuglone nei processi del biochimismo vegetale, specialmente dal punto di vista se lo idrojuglone medesimo svolga la sua azione solo in virtù delle proprie interferenze nei fenomeni di ossiriduzione, oppure anche, più specificamente, in conseguenza della sua costituzione molecolare, specialmente se si accetta l'ipotesi di una sua funzione in associazione glucosidica ¹⁾.

Convorrà allo scopo studiare meglio l'inserirsi dello idrojuglone nei processi di lignificazione dell'endocarpo nel frutto delle juglandacee e osservare parallelamente il fenomeno nei frutti di altre specie, nelle quali finora non è stata segnalata la presenza di idrojuglone, e in altri casi in cui lo idrojuglone entri specificamente in gioco in differenti processi del metabolismo.

¹⁾ BERNTSEN e SEMPER, Ber. D. Chem. Ges., 18, 206, 1885.

LA DETERMINAZIONE DEL D. D. T. NELL'OLIO DI OLIVA

Nota del prof. Giovanni Petrosini, presentata dal socio A. De Dominicis

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — Viene proposto un metodo per la determinazione dei residui di D.D.T. negli olii, nel quale per eliminare la difficoltosa necessità, insita in altri metodi, della distruzione della sostanza grassa, viene messo a punto un procedimento basato sul principio della ripartizione di un soluto fra due liquidi non miscibili fra di loro, e semplificato mediante l'uso del campione interno.

Il largo diffondersi del D. D. T. fra i mezzi difensivi della produzione agraria, cominciato fin dai primi anni dopo la guerra, ha ridestato la questione dei così detti residui, che in Italia era stata segnalata all'attenzione degli studiosi, per gli arseniati, da AMPOLA e TOMMASI e da MANARESI già dai principi del secolo, come ricorda PRATOLONGO nel suo « Insetticidi e Anticrittogamici » ¹).

Più che per i limiti di tossicità la questione è legata al D. D. T. per le seguenti tre ragioni fondamentali.

In primo luogo per la sua rapida diffusione, non solo per quanto riguarda disinfezione di ambienti e di animali, ma forse ancor più per le sue molteplici e massive applicazioni nella lotta contro i parassiti vegetali.

In secondo luogo perchè avviene che, in seguito alle disinfezioni delle coltivazioni, residui di D. D. T. si ritrovano spesso in alcuni fra i più importanti costituenti della normale razione alimentare dell'uomo, quali olii, grassi animali e latte, o per provenienza diretta dalle coltivazioni trattate, come nel caso delle piante oleaginose, oppure per provenienza indiretta, come nel caso di prodotti, grassi e latte, derivati da animali alimentati con vegetali ricchi di residui.

In terzo luogo perchè tutto questo è effetto della forte solubilità del D. D. T. nei lipidi, da cui consegue la caratteristica tendenza dei suoi residui ad accumularsi nei tessuti ricchi di grasso ²).

Questa è la ragione per la quale la questione dei residui nei prodotti destinati all'alimentazione animale riveste così particolare importanza per il D. D. T., sia dal punto di vista della tossicità della concentrazione immediata dei suoi residui, sia dal punto di vista della tossicità che possono raggiungere questi residui col loro continuo accumularsi mediante il protrarsi di una alimentazione contaminata.

In questa complessa questione, in atto fra gli scopi dell'Entomologia Agraria, sollecita della difesa della produzione vegetale, e le esigenze delle

organizzazioni igieniche, responsabili della tutela sanitaria dei consumatori, l'opera del chimico si inserisce per fornire, attraverso metodi e ricerca di metodi di determinazione specificamente adatti allo scopo, i dati analitici necessari alla impostazione e alla risoluzione del problema.

Per la determinazione del D. D. T. si servono della titolazione del cloro totale UMHOEFER ³⁾, WINTER ⁴⁾, HALL ⁵⁾, FAHEY ⁶⁾, SMITH e STOHLMANN ⁷⁾, CARTER ⁸⁾ e, con uno dei metodi oggi più adoperati, DONOVAN ⁹⁾; oppure della titolazione del cloro labile, GÜNTHER ¹⁰⁾, modificato opportunamente da ALESSANDRINI ¹¹⁾; e quando si tratti di proporzioni ridottissime, quali quelle dei residui, di metodi colorimetrici: con 9.idrossixantina e idrossido di potassio STIFF e CASTILLO ¹²⁾, con cloruri alchilici in presenza di cloruro di alluminio, BAILES e PAYNE ¹³⁾, con acido acetico glaciale e acido solforico concentrato CHAIKIN ¹⁴⁾, applicato proficuamente in Italia da RAFFAELLI ¹⁵⁾, con metilato sodico sul prodotto fortemente nitrato SCHECHTER, SOLOWAY, HAYES, HALLER ¹⁶⁾.

Questi metodi colorimetrici sono stati finora applicati ai residui che rimangono sui tessuti vegetali, quali verdura e frutta, in seguito al trattamento con D. D. T.

Sui risultati di un'ampia ricognizione compiuta con questi metodi sui prodotti ortofrutticoli dei mercati californiani, HOSKINS ¹⁷⁾ ricava per i residui di D. D. T. i dati della seguente tabella:

Prodotti	residui di D. D. T. in p. p. m.	A U T O R I
Mele	da 1,1 a 6,3	Divisione di Entomologia e Parassitologia, dell'Univers. di California.
Albicocche	3,7	Idem
Fagioli	da 0,6 a 1,9	Robinson, 1949
Broccoli	4,8	Robinson, 1949
Cavoli (sopra le foglie)	4,2	Divisione di Entomologia e Parassitologia dell'Univers. di California.
Cavoli (sotto le foglie)	1,1	Idem
Granturco (spighe)	0,4	Robinson, 1949
Uva	9,7	Hoshins, 1946
Pesche	2,7	Barnes, Carman, Ewart and Gunther, 1949
Spinaci	da 2,6 a 4,0	Divisione di Entomologia e Parassitologia dell'Univers. di California.
Fragole	0,6	Robinson, 1949
Pomodoro	da 1 a 1,7	Michelbacher, Middlekauffe Akesson, 1948

Questi metodi non sono stati ancora applicati agli olii e ai grassi animali; tranne che da parte di CARTER ¹⁸⁾, HOWELL ¹⁹⁾, TELFORD ²⁰⁾, e SCHECHTER, HALLER e POGORELSKIN ²¹⁾ per il latte e per i prodotti della trasformazione industriale del latte.

Sugli olii mancano riferimenti particolari nella letteratura estera. In Italia ha operato per la prima volta ROMANO ²²⁾, isolando il D. D. T. dalla sostanza grassa con una serie di successive saponificazioni, per determinarlo in seguito mediante titolazione volumetrica del cloro totale, nello intento di risolvere un quesito specifico proposto dal Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste. L'Autore è certamente riuscito allo scopo, ma attraverso un procedimento faticoso e lunghissimo e non si può dire ancora se sensibile a proporzioni di residui più basse di quelle da lui trovate.

SCHECHTER ²¹⁾, invece, per applicare il suo metodo colorimetrico al latte, procede prima alla separazione della sostanza grassa e poi alla sua distruzione in soluzione cloroformica mediante acido solforico saturo di anidride solforica.

Per ridurre la laboriosità insita anche nel metodo di SCHECHTER, e più per sottrarlo al grave inconveniente al quale per la formazione di emulsioni stabili spesso si va incontro nel trattamento delle soluzioni oleose con acido solforico fumante, e per rendere infine più spedite e più agevoli le operazioni della preparazione del materiale da portare alla nitrurazione e quindi alla misura colorimetrica, abbiamo pensato di studiare un procedimento che, partendo dal principio dell'estrazione diretta della sostanza da determinare dall'olio, si basasse però sulle leggi della ripartizione della sostanza stessa fra due liquidi non miscibili fra di loro, nel caso specifico sulla ripartizione del D. D. T. fra l'olio e un liquido da scegliere opportunamente.

Per il liquido da adoperare per l'estrazione la scelta non poteva che cadere sull'alcool metilico. Ma nell'alcool metilico è bassa anche la solubilità del D. D. T., ragione per cui era opportuno aumentarla, miscelando l'alcool metilico con un altro solvente nel quale l'olio fosse ancora poco solubile e il D. D. T. solubilissimo. Provammo per ciò l'acetone, ed ecco qui sotto in diagramma il risultato delle prove relative in base alle quali la scelta cadde sulla miscela costituita da 75 parti di metanolo e 25 parti di acetone, come quella che assicura una solubilità del D. D. T. (intorno al 7%) di poco inferiore alla solubilità del D. D. T. negli olii, e non trascina in soluzione che quantità trascurabili di costituenti dell'olio, che, peraltro, in simili proporzioni non disturbano affatto le successive operazioni di nitrurazione.

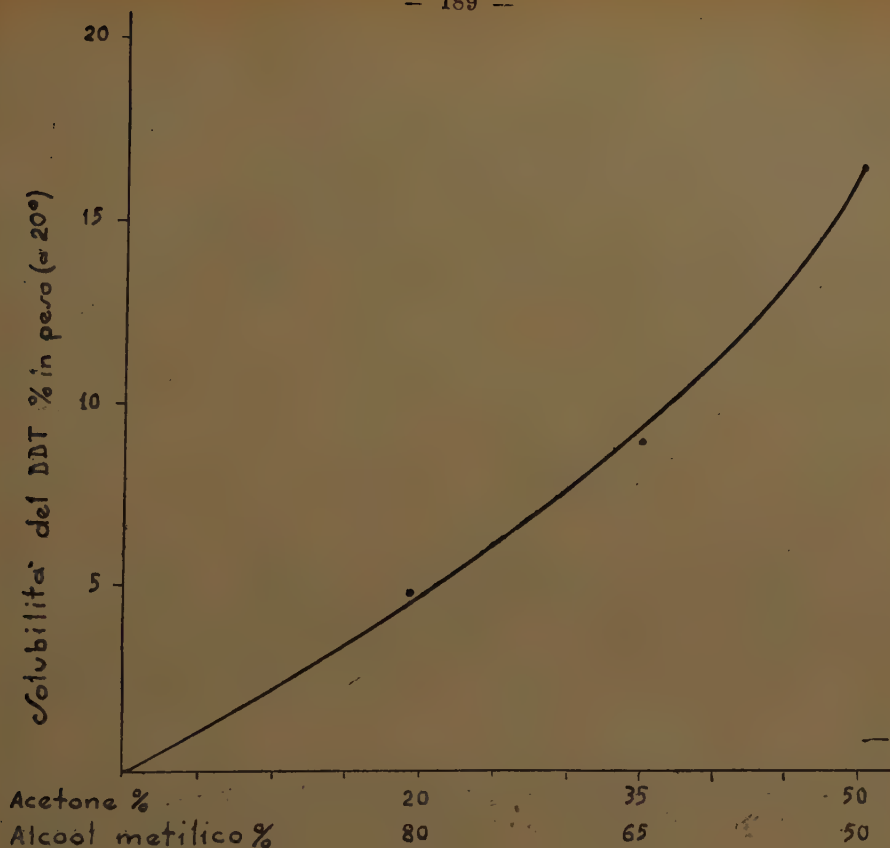


Fig. 1.

Circostanziate così le suddette condizioni, di fronte alla impossibilità di una separazione completa del D. D. T. dall'olio, neppure mediante ripetute estrazioni, e nella difficoltà di applicare direttamente le leggi e le regole della ripartizione, data la non assoluta insolubilità nell'olio dei componenti la miscela di estrazione, diveniva necessario puntare sul principio che presiede alla tecnica oel così chiamato campione interno. Sperimentalmente, solo il principio e la tecnica del campione interno possono permettere di ricavare i dati per risalire alla quantità totale di D. D. T. contenuto nell'olio in esame.

Ed ecco sistematicamente come si deve operare.

In un cilindro a tappo smerigliato si versano 20 grammi di olio e si aggiungono 20 cc. di una soluzione formata, come detto sopra, da 75 parti di alcool metilico e 25 parti di acetone purissimo. In un altro cilindro, come il primo, su 20 grammi dello stesso olio si versano 20 cc. della stessa soluzione, che però portano disciolto un milligrammo di D. D. T., che rispetto a 20 gr. di olio rappresenta 50 p. p. m. I cilindri vengono agitati vigorosamente per circa un minuto e lasciati quindi in riposo per circa 12 ore. Durante questo tempo i due strati si separano limpidi. Dallo strato alcoolico-

acetonico si preleva da ciascun cilindro la medesima quantità di soluzione (da 3 a 10 cc.); si fa evaporare in due provettoni a parete spessa tenuti in bagno d'acqua calda. Le ultime tracce di solvente vengono allontanate mediante l'azione di pompa a depressione.

Da questo punto si procede come nel metodo di SCHECHTER ¹⁶⁾, al quale si rimanda per maggiori dettagli. Schematicamente il procedimento è questo. Si versano lentamente nel provettone 6 cc. di miscela nitrante (H_2SO_4 d. 1,84 + HNO_3 d. 1,49; 1:1 in volume); si mantiene per un'ora in bagno di acqua bollente; si raffredda e si aggiungono 25 cc. di acqua distillata. Si trasporta in un imbuto separatore con aggiunta di 25 cc. di acqua e 50 di etere etilico da utilizzare anche nel lavaggio del provettone; lo strato etereo separato si lava prima tre volte con una soluzione di idrossido di sodio (2%) e poi tre volte con una soluzione satura di cloruro di sodio; la soluzione eterea viene infine evaporata lentamente a bagno-maria, e il residuo asciugato mediante l'azione della pompa a vuoto. Il residuo viene sciolto ora in 3 cc. di benzolo e addizionato di 6 cc. di una soluzione di metilato sodico (al 10%). Entro 15 minuti la soluzione, che ha assunto la stabile colorazione violacea, si fotometra con lunghezza d'onda di 590 λ .

Le operazioni al colorimetro, da noi eseguite con uno spettrofotometro COLEMAN con filtro P. C. 4, ci portano a due valori: il primo che indicheremo con a riferito all'olio estratto con una soluzione metilica-acetonica pura, il secondo che indicheremo con b riferito al medesimo olio, trattato con la stessa soluzione, addizionata di una quantità nota di D. D. T. Nel nostro caso è stata adoperata una quantità di D. D. T. necessaria ad innalzare il contenuto ignoto in D. D. T. dell'olio in esame di 50 p. p. m.

Il contenuto in D. D. T. originariamente presente nell'olio sarà calcolato in p. p. m. dalla seguente espressione:

$$p. p. m. = \frac{a}{b - a} \cdot 50.$$

Sottoponendo a controllo il metodo come innanzi descritto, siamo arrivati alle seguenti conferme sperimentali:

D. D. T. in p. p. m.	
introdotto nell'olio	risultato alla determinazione
0	0
10	8
30	29
50	52
70	75
100	103

Come si vede, il metodo risulta pienamente soddisfacente, anche come sensibilità.

Per collaudare il nostro metodo abbiamo pensato di analizzare campioni di olio provenienti da piante di un oliveto sperimentale, quello di Ascea in provincia di Salerno, trattato in prove di lotta antidacica con D. D. T., ed eccone i risultati:

Numero d'ordine	T R A T T A M E N T O	D. D. T. nell'olio in p. p. m.
1	Senza alcun trattamento	0
2	Trattamento con D.D.T. colloidale al 2%	188
3	Trattamento con D.D.T. colloidale al 1'1% + Lindane all'1%.	75

Questi risultati dimostrano che le quantità di residui negli olii provenienti da oliveti trattati possono essere altissime.

Questa constatazione concorda con i dati che ROMANO aveva trovato in differenti condizioni sperimentali ed ambientali.

BIBLIOGRAFIA

- ¹⁾ PRATOLONGO. *Insetticidi e Antigrittogamici*; Trat. di Agric. Reda, 1950, pag. 268.
- ²⁾ BETTINI. *Rivista di Parassitologia*; v. X, p. 266, (1949).
- ³⁾ UMHOEFFER. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 15, 383, (1943).
- ⁴⁾ WINTER. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 15, 571, (1943).
- ⁵⁾ HALL. U. S. Bur. Ent. Plant. Quarantine; 211, (1944).
- ⁶⁾ FAHEY. J. Assoc. Official Ag. Chem.; 28, 152, (1945).
- ⁷⁾ SMITH-STOHLMANN. U. S. Health Service Pub. H. Rep.; 59, 984, (1944).
- ⁸⁾ CARTER. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 20, 716, (1948).
- ⁹⁾ DONOVAN. *Soap. and Sanit. Chemie*; 22, 165, (1946).
- ¹⁰⁾ GUNTHER. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 17, 149, (1945).
- ¹¹⁾ ALESSANDRINI. *Ann. Chim. Appl.*; v. 37, p. 57, (1947).
- ¹²⁾ STIEF e CASTILLO. *Science*; 101, 440, (1945).
- ¹³⁾ BAILES o PAYNE. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 17, 438, (1945).
- ¹⁴⁾ CHAIKIN. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 18, 272, (1946).
- ¹⁵⁾ RAFFARLLI. *Rivista di Parassitologia*; v. 9, p. 79, (1948).
- ¹⁶⁾ SCHECHTER, SOLOWAY, HAYES e coll. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 17, 704, (1945).
- ¹⁷⁾ HOSKINS. *Agr. Chem.*; v. 4, N. 10, pag. 22, (1949).
- ¹⁸⁾ CARTER. *Ind. Eng. Chem. An. Ed.*; 19, 54, (1947).
- ¹⁹⁾ HOWELL, CAVE, HELLER, GROSS. *Jour. Dairy Sc.*; 30, 717, (1947).
- ²⁰⁾ TELFORD. *Soap. Sanit. Chem.*; 21, 161, (1945).
- ²¹⁾ SCHECHTER, HALLER e POGORELSKIN. *Agr. Chem.*; v. 1, N. 10, 46, (1946).
- ²²⁾ ROMANO. *Ann. Staz. Chim. Agr. Sper.*; N. 36, (1950).

Nota del socio Nicolò Spampinato

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — S' introducono le generalità relative ad una ipersuperficie o t-ipersuperficie, con $1 < t \leq n$ di un S_r ipercomplesso, legato ad un'algebra complessa, commutativa dotata di modulo, di ordine n qualunque.

Premessa. — Sia nell' S_r bicomplesso, che nell' S_r biduale, ho già introdotto la nozione di *ipersuperficie* e di *bi-ipersuperficie* (derivante dalla presenza dei *divisori dello zero* tra i numeri biduali ed i numeri bicomplessi.

Iniziando una prima estensione di tali nozioni, pur restando nel caso *ordinario* (e prima di passare al caso *virtuale*, al caso *ideale* o al caso dell' *indice di algebricità qualunque*, come ho già fatto per l' S_r proiettivo complesso), in questa nota dò le generalità relative alle ipersuperficie e t-ipersuperficie con $1 < t \leq n$ di un S_r ipercomplesso, legato ad un tipo generale di algebra, ad n unità [tipo che comprende, in particolare, (per $n = 2$) le algebre dei *numeri bicomplessi* e *biduali*] e precisamente delle *algebre complesse, commutative, dotate di modulo*.

Tali nuovi enti vengono definiti estendendo i concetti di *sostegno* e di *funzione numerica* [già introdotti, per una necessaria precisazione, per un' ipersuperficie algebrica dell' S_r proiettivo complesso nel caso *ordinario* e poi estesi al caso *virtuale*, *ideale* e di *indice di algebricità qualunque*] ed introducendo inoltre una nuova funzione: la *funzione caratteristica* in relazione con la nozione di punti *s-plici*, *bi-(spli)*, ... *n-(spli)*, che estende la nozione di punti *s-plici* e *bi-(spli)* già introdotta per l' S_r bicomplesso e biduale.

Le nozioni esposte, con i teoremi preannunciati, vengono sviluppati nel § 2 della parte Terza del vol. VII delle mie *Lezioni di Geometria Superiore* [Casa Editrice Pironti, Napoli].

1. — *Le funzioni razionali intere omogenee in un'algebra A, complessa, commutativa, dotata di modulo.*

Sia A un'algebra complessa, commutativa dotata di modulo, di ordine n qualunque e sia:

$$(1) \quad y = f(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})$$

una funzione razionale intera, omogenea, di grado m delle variabili ξ_1, \dots, ξ_{r+1} in A . Tale funzione, essendo A commutativa, risulta sempre a derivata ca-

caratteristica unica, cioè *totalmente olomorfa* rispetto a ciascuna sua variabile ξ_i , perchè in A ogni serie di potenze risulta speciale, cioè nel suo campo di convergenza rappresenta sempre una funzione *totalmente olomorfa* e quindi a derivata caratteristica unica. Tale derivata caratteristica unica rispetto ad una variabile ξ_i , si ottiene derivando detta serie ed in particolare la $y = f(\xi_i)$ con la regola ordinaria che vale nel campo complesso. Si hanno, pertanto, le derivate parziali prime, seconde, ecc. di $f(\xi_i)$ e vale la relazione fondamentale con ρ variabile nell'algebra A :

$$\{1\} \quad f(\xi'_i + \rho \xi''_i) = f(\xi'_i) + \rho \left[\frac{\partial f}{\partial \xi'_i} \xi''_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi'_{r+1}} \xi''_{r+1} \right] + \\ + \frac{1}{2} \rho^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_i} \xi''_i + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_{r+1}^2} \xi''_{r+1} \right] + \dots + f(\xi''_i) \rho^m$$

con il solito significato dei simboli relativi alle *potenze simboliche*.

2. — Insiemi algebrici dell' S_r ipercomplesso legato ad A e loro 1^a rappresentazione.

Nell' S_r ipercomplesso legato ad A [i cui punti $P(\xi_i)$ sono in corrispondenza biunivoca senza eccezione con le $(r+1)$ -ple $(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})$ in A di *caratteristica massima*, cioè n] diremo *insieme algebrico* l'insieme dei punti che, con le loro coordinate $(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})$ soddisfano ad una o più *equazioni algebriche* in A cioè equazioni del tipo:

$$(2) \quad f(\xi_1, \dots, \xi_{r+1}) = 0$$

con $y = f(\xi_j)$ funzione razionale intera omogenea in A .

Posto:

$$\xi_j = x_{j1} u_1 + \dots + x_{jn} u_n$$

con u_1, u_2, \dots, u_n unità di A e x_{ji} numeri complessi, l'equazione (2) in A equivale nel campo complesso. ad un sistema algebrico:

$$(3) \quad \begin{cases} f_1(x_{ji}) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_{ji}) = 0 \end{cases}$$

con f_1, \dots, f_n forme di grado m , se è m il grado di $f(\xi_i)$, nelle $n(r+1)$ variabili complesse x_{ji} . Considerate queste come coordinate di un punto di un S_N proiettivo complesso con

$$(4) \quad N = n(r+1) - 1$$

dove si ha la *I rappresentazione* dell' S_r ipercomplesso mediante una con-

gruenza di spazi (S_{n-1}) costituita da ∞^{nr} spazi S_{n-1} e di ordine 1, il sistema algebrico (3) rappresenta in S_N un'ordinaria varietà algebrica V_a composta mediante la congruenza (S_{n-1}) e precisamente con $\infty^\sigma S_{n-1}$, essendo:

$$(5) \quad \sigma = d - n + 1$$

e si ha:

$$(6) \quad d = N - n - v$$

indicando con v la nullità $n - \gamma$ della matrice:

$$M = || (\mu' a_1)_{-1} (\mu' a_2)_{-1} \dots \dots \dots ||$$

ad n righe, composta con le trasposte delle matrici (sinistre o destre) dei coefficienti a_1, a_2, \dots della forma ipercomplessa $f(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})$. L'intero γ è la caratteristica della matrice M . Dalle (4) (5) (6) si ricava:

$$(7) \quad \sigma = n(r - 1) + v$$

L'intero v , compreso tra 0 e $n - 1$ si dirà nullità della forma ipercomplessa $f(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})$. Si ha perciò:

1) Un insieme algebrico J_a dell' S_r ipercomplesso rappresentato da una sola equazione algebrica ipercomplessa (2) con $f(\xi_i)$ forma di nullità v è costituito da ∞^σ punti rappresentati da $\infty^\sigma S_{n-1}$ della congruenza (S_{n-1}) che dà la 1 rappresentazione di S_r e riempiendo una varietà V_a , algebrica, dell' S_N complesso ambiente della congruenza e si ha:

$$\sigma = n(r - 1) + v, \quad d = \sigma + n - 1$$

L'intero σ si dirà dimensione complessa dell'insieme algebrico J_a . Si ha:

$$n(r - 1) \leq \sigma \leq n r - 1$$

perchè è:

$$0 \leq v \leq n - 1$$

La V_a fornisce, con i suoi S_{n-1} generatori la I rappresentazione dell'insieme J_a .

3. — Le funzioni numerica e caratteristica determinate dalla funzione $y = f(\xi_j)$ in S_r .

Sia $X'(\xi_j)$ un punto dell' S_r ipercomplesso legato ad A .

Sostituendo nella $y = f(\xi_j)$ le equazioni parametriche $\xi_j = \xi'_j + \rho \xi''_j$ di un S_1 ipercomplesso $a = X'X''$ uscente da X' si ha la $\{1\}$ del n.º 1. Se nella $\{1\}$ risulta uguale ad s l'esponente del parametro ipercomplesso ρ nel 1º termine con il coefficiente non nullo, porremo $N(X') = s$ se X'' è generico.

L'equazione:

$$f^{(s)}(\xi_j) = 0$$

$$\text{con } f^{(s)}(\xi_j) = \left[\frac{\partial f}{\partial \xi'_1} \xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi'_{r+1}} \xi_{r+1} \right]^{(s)} \quad (s \geq 1)$$

cioè con $f^{(s)}(\xi_j)$ termine che per $\xi_j = \xi''_j$ dà, diviso per $\frac{1}{s!}$, il coefficiente di ρ^s , rappresenta nell' S_r un insieme algebrico J_s di dimensione complessa:

$$\sigma_s = n(r-1) + v_s$$

con v_s nullità di $f^{(s)}(\xi_j)$. Porremo:

$$C(X') = n - v_s$$

Nel caso $s=0$, cioè nel caso che X' non appartiene all'insieme algebrico J di equazione $f(\xi_j) = 0$, porremo $C(X')$ uguale alla caratteristica dell'elemento $f(\xi'_j)$ di A , elemento che risulta non nullo.

Restano così definite nell' S_r ipercomplesso due funzioni $N(X)$ e $C(X)$ determinate dalla funzione $y = f(\xi_j)$ razionale, intera omogenea delle $(r+1)$ variabili ipercomplesse $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r+1}$, nell'algebra A .

4. — Le $(v+1)$ — ipersuperficie dell' S_r ipercomplesso legato ad A .

Dopo le considerazioni dei numeri precedenti possiamo introdurre la seguente:

DEFINIZIONE: L'ente dell' S_r ipercomplesso legato all'algebra A , che si ottiene associando all'insieme algebrico J_σ le funzioni algebriche $N(X)$ e $C(X)$ e che si indicherà con $W = [J_\sigma, N(X), C(X)]$ si dirà la $(v+1)$ — ipersuperficie di equazione $f(\xi_j) = 0$, di ordine m col sostegno J_σ , la funzione caratteristica $C(X)$.

Per $v=0$ la 1-ipersuperficie si dirà semplicemente ipersuperficie. Per $v=1$ la 2-ipersuperficie si dirà pure bi-ipersuperficie, ecc.

a) Per il valore massimo di $v=n-1$ avremo una n -ipersuperficie W col sostegno J_σ di dimensione $\sigma = nr-1$. Si ricordi che l' S_r è di dimensione complessa nr .

b) Per il valore minimo di $v=0$ avremo l'ipersuperficie W col sostegno J_σ con $\sigma = nr-r$. In tal caso le n equazioni (3) che danno la varietà rappresentatrice del sostegno J_σ di W rappresentano una V_{v-n} di ordine m^n [composta con $\infty^{(nr-1)} S_{n-1}$ della congruenza (S_{n-1})] intersezione di n -ipersuperficie di S_N di ordine m , legate dalle condizioni derivanti dalle condizioni di derivabilità unica a cui soddisfa la $y = f(\xi_j)$ rispetto a ciascuna delle variabili ξ_j , che si esprime con delle relazioni in cui intervengono le derivate prime di $f_1(x_{ji}), \dots, f_n(x_{ji})$ e che dipendono dalla tabella di moltiplicazione di A .

c) Per $m = 1$ la $(v + 1)$ -ipersuperficie si dirà un $(v + 1)$ -iperpiano. Così per $m = 2$ si dirà una $(v + 1)$ -iperquadrica.

Si dimostra che:

II) Ogni punto del sostegno J di un $(v + 1)$ -iperpiano è $(v + 1)$ -semplice. Più in generale:

III) Per una $(v + 1)$ ipersuperficie di ordine m ogni punto (del suo sostegno J) in cui è $N(X) = m$ è un punto $(v + 1) - (m - p)lo$.

Nel caso $r = 1$ la $(v + 1)$ ipersuperficie si dice un $v + 1$ -gruppo algebrico dell' S_1 ipercomplesso.

IV) Un generico gruppo algebrico di ordine m dello S_1 ipercomplesso legato ad A è costituito da m^λ punti essendo λ la differenza fra l'ordine n di A e l'ordine della sua sotto algebra eccezionale.

Mediante questo teorema, conseguenza semplice del teorema fondamentale dell'algebra, che ho già dimostrato per una qualunque algebra complessa dotata di modulo, si ricava il significato dell'ordine m di una ipersuperficie di ordine m dell' S_r ipercomplesso. Si osservi, in relazione al teorema IV) che essendo A commutativa se è irriducibile è $\lambda = 1$, se A è riducibile è λ uguale al numero delle sotto-algebre di A di cui questa è somma diretta.

5. $(v + 1)$ Iperpiani tangenti e $(v + 1)$ -iperconi tangenti.

Se $X' (\xi'_j)$ è un punto $(v + 1) - (s - p)lo$ della W , l'equazione:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \xi'_1} \xi'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi'_{r+1}} \xi'_{r+1} \right]^{(s)} = 0$$

rappresenta una $(v + 1)$ -ipersuperficie di ordine s il cui sostegno è costituito da rette ipercomplesse uscenti da X' con la molteplicità di intersezione con W in X' maggiore di s , cioè, come diremo, *tangenti* a W in X' . Essa ha in X' un punto pure $(v + 1) - s - plo$ e si dirà *l'ipercono tangente* a W nel punto $(v + 1) - s - plo$ X' . In particolare per $s = 1$ X' è $(v + 1)$ -semplice e detto ipercono è un $(v + 1)$ iperpiano tangente a W nel suo punto $(v + 1)$ -semplice X' . Se è poi $v = 0$ avremo *l'iperpiano tangente* a W nel suo punto semplice X' .

6. — Varietà caratteristiche di S_N rispetto all'algebra.

Diremo varietà caratteristica di S_N rispetto all'algebra A ogni varietà algebrica di S_N composta mediante la congruenza (S_{n-1}) e rappresentante perciò, per definizione, una *varietà iperalgebrica* dell' S_r ipercomplesso, nel caso particolare in cui tale varietà iperalgebrica risulta *algebrica*, cioè è rappresentabile con una o più equazioni algebriche nelle $r + 1$ variabili

$\xi_1 \dots \xi_{r+1}$ in A . Si ha che:

Gli spazi caratteristici di S_N , di dimensione $N - n + v$ rispetto ad A sono tutti e soli gli spazi [composti mediante la congruenza $S_{(n-1)}$] immagini dei $(v + 1)$ -iperpiani.

Gli spazi caratteristici di dimensione $N - n$ costituiscono la congruenza (S_{N-n}) duale di (S_{n-1}) [immagine dello spazio Σ_r duale di S_r , legato ad A , costituito dagli ∞^r iperpiani di S_r].

Tenendo conto di quanto è detto nel n. 4 si dimostra il:

TEOREMA FONDAMENTALE: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una V_{N-n} algebrica di S_N , di ordine m^n , sia caratteristica, rispetto all'algebra A di ordine n [cioè dia la I rappresentazione di un'ipersuperficie W , di ordine m , dell' S_r ipercomplesso legato ad A] è che in ogni suo punto semplice P' ammetta come S_{N-n} tangente un S_{N-n} caratteristico rispetto ad A .*

Tale S_{N-n} caratteristico dà la I rappresentazione in S_N dell'iperpiano ipercomplesso tangente a W nel suo punto semplice X' rappresentato in S_N dall' S_{n-1} di (S_{n-1}) passante per P' e generatore della V_{N-n} .

7. — Sistemi lineari di ipersuperficie. Involuzioni di gruppi di punti. Trasformazioni birazionali.

Per le ipersuperficie dell' S_r ipercomplesso legato ad A , come nel caso complesso, s'introduce il concetto di ipersuperficie dello stesso ordine linearmente dipendenti.

Si ha che:

Date nell' S_r ipercomplesso un numero finito t di ipersuperficie m , delli $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \dots)$, \dots , $(a_1^{(t)}, a_2^{(t)} \dots)$ i coefficienti delle forme che eguagliate a zero danno le equazioni di tali ipersuperficie, condizione necessaria e sufficiente affinché esse risultino indipendenti è che sia di caratteristica massima la matrice composta con le trasposte delle matrici destre o sinistre degli elementi $a_i^{(j)}$ dell'algebra A .

I sistemi lineari di ipersuperficie, nel caso $r = 1$, si diranno involuzioni di gruppi algebrici di punti dell' S_1 ipercomplesso legato ad A .

Un sistema lineare dell' S_r ipercomplesso, determinato da $r + 1$ ipersuperficie linearmente indipendenti si dirà omoloidico quando r ipersuperficie hanno in comune un sol punto variabile con dette r ipersuperficie nel sistema. Come nel caso complesso con i sistemi omoloidici si definiscono le trasformazioni birazionali, nell' S_r o fra due S_r ipercomplessi legati alla stessa algebra A .

8. — Osservazioni relative alla II e III rappresentazione dell' S_r ipercomplesso e dello spazio duale Σ_r .

Quanto s'è detto per le $(v+1)$ -ipersuperficie ed in particolare per le ipersuperficie dell' S_r ipercomplesso legato ad A , si riflette, nelle relative proprietà, passando dalla I alla II e III rappresentazione complessa dell' S_r ipercomplesso nella riemanniana V_{nr} e nell' S_{nr} proiettivo complesso. In particolare in questo S_{nr} avremo delle trasformazioni birazionali, formanti gruppo, immagini delle trasformazioni birazionali dell' S_r ipercomplesso. Tale gruppo dipenderà dall'algebra A considerata.

Si noti, infine, che, quanto s'è detto per l' S_r , si ripete per lo spazio duale Σ_r , come nel caso complesso.

LE RONDINI IN SHAKESPEARE

Nota del socio Giuseppe De Lorenzo

(Pervenuta all' Accademia il dì 20 giugno 1951)

Sunto. — In questa Nota si cerca di dimostrare, che il *martlet*, descritto da SHAKESPEARE nel *Macbeth* (I, 6) ed in *The Merchant of Venice* (II, 9), non è, come comunemente si traduce e s'interpreta, il rondone, *Cypselus apus*, e nemmeno la rondine comune o campagnola, *Hirundo rustica*; ma è, invece, la rondine casalinga o cittadina, *Hirundo urbica*; che in Italia si chiama rondicchio o balestruccio.

Recentemente il professore Mario PRAZ, dell' Università di Roma, insignito studioso di lingua e letteratura inglese e maestro di color che sanno l'inglese in Italia, mi ha mandato un suo scritto di quest'anno, *Bussano alla porta di Macbeth*; nel quale, tra altro, traduce la sesta scena del primo atto, in cui è descritto l'arrivo del re Duncan col suo seguito ad Inverness, innanzi al castello di Macbeth, nella dolcezza della tarda sera estiva, allietata dagli ultimi voli delle rondini. Ciò ha richiamato alla mia mente la memoria d'un tempo che fu, più di quaranta anni or sono, quando anche io mi occupai della stessa scena, in un articolo su *Il passero di Lesbia*, pubblicato nel *Corriere della Sera* di Milano e ristampato, poi, nel mio libro *La Terra e l'Uomo*: sia nelle prime edizioni del RICCIARDI in Napoli e dello ZANICHELLI in Bologna, che nella sesta ed ultima edizione, pubblicata nel 1947 dall' Editrice Faro in Roma. Siccome ora vedo, che la

mia interpretazione zoologica della scena è diversa da quella di PRAZ e di altri traduttori e chiosatori, anche inglesi, voglio qui fare un esame di coscienza e saggiare la mia opinione sulla pietra di paragone della sicura competenza di PRAZ: per vedere, se per caso io non sia caduto in errore ed abbia, in buona fede, fatto passare per oro quel che era solamente similoro. Ecco, dunque, come il PRAZ, nel suo citato suo scritto, commenta la scena:

« Soffermiamoci su un punto: voglio dire la sesta scena dell'atto primo allorchè la clemente figura di Duncan e la natura sacra e soavemente pacifica dell'ospitalità son fatte risaltare col riferimento alla scena circostante, mentre Duncan entra nel castello di Macbeth. "Questo castello,, dice Duncan "hà un'amena posizione; l'aria con lieve spiro e dolcemente accarezza i nostri placidi sensi,.. A cui Banco: "Quest'ospite dell'estate, il rondone, che nidifica sui templi, prova, con la sua stanza diletta, che qui il respiro del cielo ha un profumo lusinghiero,; non v'è cornice, fregio barbacane, non c'è angolo che per poco si presti, dove questo uccello non abbia costruito il suo pendulo letto e la sua culla feconda: io ho osservato che dove essi nidificano di più, o risiedono di più, l'aria è deliziosa.,

Duncan. *This castle hath a pleasant seat; the air
Nimbly and sweetly recommends itself
Unto our gentle senses.*

Banquo. *This guest of summer,
The temple - haunting martlet, does approve,
By his loved mansionry, that the heaven's breath
Smells wooingly here: no jutty, frieze,
Buttress, nor coign of vantage, but this bird
Hath made his pendent bed and procreant cradle:
Where they most breed and haunt, I have observed,
The air is delicate.*

Ora questa suggestione di scena mite, di serena sera, quando il cielo impallidito risuona degli stridi delle rondini, questa scena che gli spettatori del tempo di SHAKESPEARE realizzavano nella loro viva fantasia, stimolata dalle parole del poeta: questa pausa di pace, d'immersione nella scena naturale, con la sua insistenza sui nidi delle rondini, quale simbolo di ospitalità, serve a dare risalto alla terribilità dell'assassinio non meno dei reiterati colpi alla porta di Macbeth. »

Questo, ed altro ancora, il commento di Mario PRAZ. Ed ecco, ora, quel che scrivevo io nel mio saggio; nel quale, confutando l'opinione, esposta da Otto KELLER, nella sua opera su *Die antike Tierwelt*, che il passero di Lesbia cantato da CATULLO, *passer deliciae meae puellae*, fosse non già il

comune passero domestico, bensì il passero solitario, *Turdus cyaneus* o *Turdus musicus*, cantato da LEOPARDI come suo simbolo, cantato anche da SHAKESPEARE come *the throstle with his note so true*; dimostravo invece, che si tratta proprio del *Passer domesticus*, var. *Passer Italiae*: e concludevo dicendo, che i grandi poeti, con il loro intuito geniale e profondo, vedono e rappresentano le forme e le manifestazioni della vita e del mondo in maniera sintetica ed a volte assai più esatta delle minute osservazioni e descrizioni analitiche di noialtri gentiluomini scientifici. Ecco qui appunto le mie parole:

« Perchè questi grandi poeti, i quali fissano durabilmente, per la gioia di noi poveri mortali, le fluttuanti, labili immagini del mondo dei fenomeni e delle forme, si servono sempre dell'esatta visione della realtà, con cui fanno scaturire nei nostri spiriti un mondo di pensieri e di sentimenti inespriuibili. Veggasi, per esempio, giacchè siamo in tema di uccelli, che cosa dalla visione delle rondini sa trarre il poeta dei poeti al principio della sesta scena del primo atto del *Macbeth*. Qui l'uccello è chiamato *martlet* [secondo la correzione, apportata dal ROWE all'evidente errore di stampa *barlet* del primo folio, ed in concordanza con l'esatto *martlet* della nona scena del secondo atto del *Merchant of Venice*], corrispondente al moderno *martinet* o *martin*, che può significare rondone (come l'han tradotto Diego ANGELI ed altri), ma anche, e più esattamente, perchè il rondone si chiama *swift*, significa balestruccio. Che SHAKESPEARE avesse in mente le rondini, è dimostrato dalla descrizione dei loro nidi, pendenti dai fregi e cornicioni del castello; come li costruiscono appunto le rondini ed i balestrucci, *Hirundo rustica* e *Hirundo urbica*, *Progne* e *Chelidon*: mentre, com'è noto, i rondoni, *Cypselus apus*, nidificano nelle fessure e nei fori delle rupi e dei muri. Ora ecco la scena. Il re Duncan col seguito arriva nel dolce e tardo vespero estivo innanzi al castello di Inverness e, inconscio della tragica fine, che ivi lo attende, resta incantato dalla bellezza del sito e dalla soavità dell'aria: "Questo castello ha una sede piacente; l'aria dolce e fina s'insinua nei nostri sensi gentili,,; e Banco, anch'egli inconsapevole della tragedia imminente, osserva: "Quest'ospite estiva, la rondine amica dei templi, prova con la sua cara dimora, che l'alito del cielo qui odora carezzevole: non v'è aggetto, fregio, sporgenza, nè cantone opportuno, in cui quest'uccello non abbia fatto il suo pendulo letto e la culla procreante: dove essi più frequentano e nidificano, io ho osservato, l'aria è delicata,,. E qui appare sulla porta del castello lady Macbeth. — Si può immaginare niente di più semplice e, al tempo stesso, di più straordinario? Io non posso far rivivere in me quella scena, senza provare un fremito, che mi par quasi giunga nelle misteriose radici cosmiche del mio essere, in modo da farmi sentire tutto il brivido dell'esistenza nei suoi due poli della vita e della morte. Fuori: la chiara dolcezza del vespero estivo, con l'aria odorosa, con i voli delle rondini, con i penduli nidi, le piccole culle,

in cui già pigola la prima, tenera, morbida vita, pur ora schiusa dall'uovo, per respirare, mangiare, amare, godere. Dentro: il bieco, scuro castello, il sonno grave dopo il cibo ed il poto, la sanguigna uccisione, la morte, ed il portiere ubriaco, che immagina di essere il portiere dell'inferno! Non è questa breve scena quasi un simbolo della vita e del mondo?»

Questo, che avevo scritto nel mio libro *La Terra e l'Uomo*, lo ribadii nell'altro mio volume, *Shakespeare e il dolore del mondo*, Bologna, Zanichelli, 1921, p. 323: «Il re Duncan arriva la sera innanzi al castello di Inverness, dove l'attende la morte, e dice a Banco: Questo castello ha una sede piacente; l'aria dolce e fina carezza i nostri sensi delicati. E Banco risponde: Questa ospite dell'estate, la rondine abitatrice dei templi, prova con la sua amata costruzione, che il respiro del cielo odora amorosamente qui: non v'è aggetto, non fregio, non arco, non angolo propizio, in cui quest'uccello non abbia fatto il suo letto pendente e la culla procreante: dove essi generano e dimorano, io ho osservato, l'aria è delicata. — Ed ecco che, tra il volo delle rondini nella dolcezza vespertina, dalla porta del castello appare, sorridente e gentile, lady Macbeth.» Con altre parole, è la medesima interpretazione.

Questa mia interpretazione differisce da quella di Mario PRAZ e di altri traduttori italiani, nonchè di alcuni chiosatori e commentatori e vocabolaristi inglesi, in ciò: che essi ritengono essere il *martlet* di SHAKESPEARE il rondone, mentre io, invece, credo sia quello, che gli inglesi moderni chiamano *house-martin* e noi italiani chiamiamo rondicchio o balestruccio o rondine casalinga: *Hirundo urbica*. Quale delle due interpretazioni corrisponde alla realtà ed alla visione poetica di SHAKESPEARE? Per decidere ciò bisogna esaminare e vagliare i dati: e vi sono dati negativi e positivi: Cominciamo dai negativi.

Anzitutto SHAKESPEARE in tutta la sua opera non nomina mai il rondone, chiamandolo col comune nome moderno inglese *swift*, derivato dall'aggettivo anglosassone *swift*, che vuol dire veloce. E, certo, non si poteva trovare nome più appropriato per il rondone, che è forse il più veloce in volo degli uccelli, raggiungendo una velocità di volo di più di trecento chilometri l'ora. E perchè SHAKESPEARE, nel suo immenso vocabolario, non l'usa mai? Forse non esisteva ancora come nome comune nel periodo elisabettiano? Certo, nel seicento esisteva come cognome proprio di famiglia, come esiste il cognome RONDONE in Italia, e lo rese immortale il grande Jonathan SWIFT. Lo stesso PRAZ, od altro filologo, più saputo di me, può dire come stanno le cose. Questo io so, che SHAKESPEARE, mentre usa moltissime volte la parola *swift* come aggettivo, per dire veloce, non l'usa mai come sostantivo, nel senso moderno, per indicare il rondone. Invece egli adopera parecchie volte la parola *swallow*, dall'anglosassone *swelwae*, affine al tedesco *Schwalbe*, con cui nelle lingue germaniche si chiama la rondine comune, *Hirundo rustica*; la quale, pur essendo più piccola del

rondone, pel suo piumaggio prevalentemente scuro può confondersi col rondone; col quale non si può certo confondere il balestruccio, *Hirundo urbica*, che ha bianco l'addome: a parte le altre generiche e specifiche particolarità, che qui appresso esamineremo. Mi viene quindi il dubbio, che SHAKESPEARE col nome *swallow* indichi, oltre che la rondine, anche il rondone; e mi conferma in ciò la considerazione, che egli l'adopera quasi sempre come termine di paragone per la velocità. Ne dò qualche esempio. Nella terza scena del secondo atto di *Titus Andronicus*, questi si vanta, di avere cavalli da caccia, che corrono veloci come rondini sul piano: *run like swallows o'er the plain*. E nella terza scena del quarto atto della stessa tragedia Aaron dice: *as swift as swallow flies*. — Nella scena seconda del quinto atto di *King Richard the Third*, il duca di Richmond, che poi divenne Enrico VII, esclama, che la speranza è veloce, e vola con ali di rondine: *hope is swift, and flies with swallow's wings*. Nella seconda parte del *King Henry the Fourth*, atto quarto, scena terza, il grasso e pigro e prudente Falstaff risponde al principe John of Lancaster, che lo rimprovera di esser giunto tardi sul campo di battaglia, così: « Pensate, che io sia una rondine, una freccia od un proiettile? Ho forse io, nel mio povero e vecchio moto, la velocità del pensiero? » Come si vede, l'immagine della rondine, o del rondone, è qui sempre associata con la sua velocità. In altri due casi, invece, è messa in rapporto con la primavera: in *Winter's Tale*, IV, 4, quando dice, che i narcisi vengono prima ancora che ardisca la rondine, *before the swallow dares*, ed accolgono in bellezza i venti di marzo; e nel *Timon of Athens*, III, 6, quando amaramente osserva, che la rondine, *swallow*, non segue più volentieri l'estate, nè lascia più volentieri l'inverno, di quel che gli uomini ingrati seguano la buona e fuggano la cattiva fortuna degli amici.

L'associazione della rondine, e del rondone, con la primavera fa parte del patrimonio culturale di tutta l'umanità e ritorna di continuo nelle espressioni poetiche e prosaiche, di tutti i tempi e di tutti i luoghi. ORAZIO scriveva a MECENATE (epist., I, 7), che con le prime nevi sui colli albanì egli se ne sarebbe sceso al mare, a chiudersi con i suoi pensieri e le sue letture, per ritornare a lui con i zefiri e la prima rondine: *te, dulcis amice, reviset cum zephyris, si concedes, et hirundine prima*. È il motivo, a tutti noi noto del famoso sonetto di PETRARCA:

Zefiro torna, e il bel tempo rimena,
E i fiori e l'erba, sua dolce famiglia,
E garrir Progne e pianger Filomena,
E primavera candida e vermiglia.

Ma i versi dolcissimi di PETRARCA sono già inficiati, come tutta la poesia rinascimentale, dalle reminiscenze classiche e mitologiche; sì che i nunzi

della primavera, la rondine e l'usignuolo, diventano Procne e Filomela; per ricordarci quell'orrenda storia delle due sorelle, ricamata in arazzo purpureo da OVIDIO nel libro sesto delle *Metamorfosi*, simile a tutte le altre storie di incesti, di lagrime e di sangue: di TESEO, di ATREO, di TEREIO, di EDIPO, etc.; di cui si compiaceva la fantasia feroce degli antichi greci. Non ne rimane immune neanche il genio aspro di DANTE, quanto nel canto nono del *Purgatorio* ricorda la rondine:

Nell'ora che comincia i tristi lai
La rondinella presso alla mattina,
Forse a memoria dei passati guai.

Ben diversamente da questa fredda terzina accademica, e con ben altro vigore, lo stesso DANTE rappresentò l'allodola, quale si presentava a lui e si presenta a noi, in sempre vivente realtà:

Quale allodetta che in aria si spazia
Prima cantando, e poi tace, contenta
Dell'ultima dolcezza, che la sazia.

E con questi tre versi polì una gemma più luminosa dei 105 iridescenti e trascendenti versi dell'ode *To a Skylark* di SHELLEY. Del resto, lo stesso OMERO, poeta sovrano, che sopra gli altri com'aquila vola, quando volle ricordare la rondine, non pensò alle favole di sua gente, ma la rappresentò quale egli la vedeva e la sentiva, conforme alla realtà, con la più grande semplicità. Nel canto XXI dell'*Odissea*, quando Odisseo tese la corda del suo grande arco e la fece scattare, quella garri come una rondine: *χελιδόνι εἰκέλη αὐδῆν*. E nel canto XXII Atena, dopo aver rivolto i suoi rimproveri ed i suoi consigli ad Odisseo, essendo saltata sul tetto della casa, vi si posò, come una rondine: *χελιδόνι εἰκέλη ἄντην*. Proprio così garrisce e si posa sul tetto, presso il suo nido, il balestruccio.

Similmente SHAKESPEARE, il grande fratello di Omero, e conoscitore ed amante del suo OVIDIO, nel descrivere le rondini od i rondoni, *swallows*, ne vede solo la velocità dei voli e la loro associazione con la primavera, senza occuparsi delle loro favole antiche. Ma, nel descrivere il *martlet* della scena del *Macbeth*, egli non poteva pensare al rondone; non solo per i dati positivi della sua descrizione, che qui appresso esamineremo, ma anche per un altro dato negativo. Il rondone, infatti, non appartiene alla famiglia delle rondini, come per la sua apparenza si credeva fino ai tempi di LINNEO, ma fa parte dell'ordine dei caprimulgi ed è, quindi, un succiacapre, che per la sua attività funzionale di vita e di volo ha assunto un aspetto convergente con quello delle rondini: differenziato nelle diverse specie del rondone comune, *Cypselus apus*, del gran rondone o rondone alpino, *Cypselus*

melba, della salangana, etc., ed assumendo anche abitudini diverse da quelle delle rondini. Con la sua grande potenza e velocità di volo esso sale a grandi altezze nell'aria, per cercare il suo cibo; specialmente a prima sera, quando se ne va tanto in alto, che lo si perde di vista e di udito: sì che lo SPALLANZANI fu tratto a supporre, erroneamente, che durante la notte non ritornasse nel nido, ma continuasse a vagare assai in alto nell'aria. Ora il re Duncan ed il suo seguito arrivano innanzi al castello di Macbeth a suon di trombe e lumi di torce, *hautboys and torches*, quindi già a tarda sera, quando non vi potevano essere più rondoni, e solo le rondini si attardavano nei loro ultimi volteggiamenti intorno ai loro penduli nidi, prima di introdursi, per il riposo notturno, tra i piccoli pigolanti. Inoltre i rondoni, con i loro stridi selvaggi ed acutissimi e con i loro voli saettanti e rapidissimi, non sono proprio fatti, per ispirare quell'aura di dolcezza, di serenità e di pace, descritta nelle parole di Duncan e di Banco; alla quale invece ben si convengono i tenui garriti ed i lievi aleggiamenti dei balestrucci; che, nella incipiente oscurità, fanno ancora scorgere i loro candidi ventri intorno ai loro nidi, sotto le grondaie. Le rondini, dice il BREHM nella sua grande *Vita degli animali*, meritano di esser chiamate animali nobili, sia nei loro voli leggiadri, che nel posarsi ed anche nello stentato camminare, in cui pur se la cavano meglio dei rondoni, che sembrano loro così affini e sono, invece, indicibilmente goffi. Il loro canto è un gradevolissimo cinguettio, che rallegra chi lo ascolta. I loro voli ed i loro cinguettii, la loro indole dolce ed insinuante assicurano loro protezione ed ospitalità da parte degli animi gentili. Ricordo, a questo proposito, un episodio della vita di Filippo PALIZZI, sì grande amico e pittore di animali. Egli aveva in Napoli la sua casa ed il suo studio alla salita dell'Arco Mirelli, all'angolo del corso Vittorio Emanuele. In una primavera un balestruccio penetrò per la finestra aperta del suo studio e, non vedendosi disturbato, cominciò con la sua compagna a fare il nido in un angolo e vi si stabilirono fino a settembre, quando se ne partirono con la loro nidiata. E nella primavera seguente, ed in altre ancora, PALIZZI lasciò aperta la finestra del suo studio: e le rondini fedeli ritornarono alla loro *beloved mansionry*, presso il loro amico e protettore, il redivivo Paolo UCCELLO abruzzese-napoletano. Questa simbiosi tra rondini ed uomini non si può egualmente realizzare con i selvaggi rondoni.

Last not least dei dati negativi è il fatto, che i rondoni della più diffusa specie europea, *Cypselus apus*, a cui si dovrebbe riferire, secondo alcuni, il *martlet* di SHAKESPEARE, non costruiscono mai i loro nidi pendenti sotto le grondaie ed i cornicioni delle case; ma scelgono sempre crepacci di rupi e fori e trafori di muri, anche di orificio strettissimo, purchè dentro abbastanza lunghi e spaziosi, in fondo ai quali fanno i loro nidi: impastando i loro stessi escrementi e pagliuzze e piume con la loro copiosa e vischiosa secrezione salivare; con la quale impaniano ed ammassano nelle capaci

bocche tutti gli insetti volanti, che ghermiscono a fauci spalancate nei loro continui voli. E, mentre « per lo libero ciel fan mille giri », ad un tratto si precipitano come saette verso i loro buchi, si avvinghiano agli orli con le unghie uncinate dei quattro diti, tutti rivolti in avanti, dei loro cortissimi piedi, ed in un batter d'occhio spariscono nell'oscurità dei loro covi; dove vanno a rovesciare i grossi boli alimentari nelle bocche aperte dei piccolissimi implumi. Questi, così abbondantemente ingozzati, immobili ed al buio, ingrassano in modo tale, che, come dice lo SPALLANZANI, « sembrano picciolini pani di burro » e pesano quasi il doppio dei loro piumati genitori. Ma, anch'essi perdono il grasso ed il peso, appena pur essi si lanciano nei lor folli voli. Nel folle volo si svolge quasi tutta la vita del rondone.

Malgrado questi dati negativi, molti traduttori italiani ed alcuni commentatori inglesi hanno ritenuto, come s'è detto, che il *martlet* del *Macbeth* fosse il rondone. Così, p. es. Henry CUNINGHAM, l'editore del *Macbeth* nell'*Arden Shakespeare* di METHUEN, scrive: *martlet, the swift; often confused with the swallow and house-martin*. Tale errore è forse dovuto ad alcuni vocabolaristi. Il diffusissimo *Concise Oxford Dictionary* s. v. *martlet* scrive: « *Swift*, [f. F. *martlet* prob. f. *martinet* dim. f. *martin*] »; e quindi, s. v. *martin*, senza accorgersi de la contraddizione che nol consente, stampa: « *martin* (also house-martin) bird of swallow family, building mud nest on house walls [F. f. L. *martinus*]. » Senza tale contraddizione, e più saggiamente il vecchio WEBSTER nel suo *American Dictionary of English Language* riporta, s. v. *martin*, quel che a tale proposito aveva scritto l'espertissimo e dottissimo DRYDEN: « A bird of the genus *Hirundo*, or swallow kind, wich forms its nest in buildings. It was formerly written by some authors *Martlet*. » E, similmente e rettamente, Henry Cecil WYLD, nel suo *Universal Dictionary of English Language*, London, Routledge, 1936, scrive: « *Martlet*, fr. *martinet*, dim. of *martin*: name given to several birds of swallow family, esp. the house-martin, *Hirundo urbica*, building its nest of mud or clay under eaves. » E basta confrontare queste definizioni con le descrizioni, che del *martin* o *house-martin*, od anche *window-swallow*, dà qualunque libro moderno inglese di zoologia, per persuadersi, che esso corrisponde appunto al *martlet* di SHAKESPEARE, al nostro balestruccio, o *Hirundo urbica*. Del resto, l'onesto tedesco Alexander SCHMIDT, nel suo classico *Shakespeare-Lexicon*, aveva già concisamente sentenziato: « *Martlet*, the bird *Hirundo urbica*. *Macb.* I, 6; *Merch.* II, 9. » E questo fia suggel ch'ogni uomo sganni.

Già, dunque, dai dati negativi appare chiara l'interpretazione del *martlet* del *Macbeth*; la quale diviene anche più evidente con l'analisi dei dati positivi, offertici dallo stesso SHAKESPEARE con la descrizione dell'uccello e della sua vita.

Tale descrizione, infatti, serba, sotto l'afflato purissimo della poesia, la più rigorosa esattezza scientifica, aderentissima alla realtà. Egli comin-

cia dal chiamarlo « quest'ospite dell'estate, *this guest of summer* »: il che si può egualmente riferire alle rondini ed ai rondoni. Ma poi lo definisce, più particolarmente, « frequentatore dei templi, *the temple-haunting martlet*. » Perchè frequentatore dei templi? Nell'Inghilterra del tempo dei Tudor le abitazioni comuni, rurali e civili, sparse per le campagne od agglomerate nelle città, erano capanne, *cottages*, od umili case, anche se ampie e comode, ma basse, costruite in legno, ed a volte anche intonacate; le quali poco si prestavano alla nidificazione, sia delle rondini che dei rondoni. Ma, tra i *cottages* delle campagne e le case delle città sorgevano e si ergevano, cospicui di mole e di altezza, i castelli dei signori feudali, i grandi palazzi signorili e, soprattutto, le famose cattedrali ed i templi, cattolici prima, e poi anche protestanti, di stile anglonormanno prima, e poi del caratteristico stile gotico inglese, decorato e verticale, ad arco acuto. Tali templi, costruiti in pietre squadrate, ben connesse, cementate, lisciate e polite, non presentavano fori e fratture, che potessero dare asilo ai rondoni. Avveniva quindi per essi il contrario di quel che avveniva ed avviene in Roma; la quale con gli innumerevoli tori delle sue immense ruine, del Colosseo, delle Terme, etc., può considerarsi la città classica ed ideale dei rondoni; che infatti vi prosperano a centinaia di migliaia e d'estate ne saettano il cielo e ne riempiono l'aria di strilli.

I templi inglesi, invece, se non erano, per la loro compattezza, adatti per i rondoni, offrivano, con la loro ornamentazione gotica, ricca di ogni specie di aggetto, fregio e sporgenza, *jolly, frieze, buttress*, sempre un angolo vantaggioso, *coign of vantage*, in cui la rondine, sia la *rustica*, che la *urbica*, potesse appoggiare e costruire il suo nido; che da SHAKESPEARE è chiamato la sua amata magione, *his loved mansionry*. Questa nel *primo folio* è chiamata *mansonry*, emendata poi in *mansionry* dal THEOBALD ed in *masonry* dal POPE. Sia come si vuole, è sempre la magione, l'abitazione, la casa, la costruzione; tenendo anche conto, che nel teatro elisabettiano si chiamavano *maisons, mansions, houses*, le costruzioni provvisorie o *praticabili*, addossate alle spalle ed ai fianchi del palcoscenico, per servire agli attori, invece di cambiamenti di scene, secondo i diversi luoghi, in cui dovevano svolgersi le loro azioni. Si tratta, quindi, di costruzioni, più o meno durature, sporgenti dal piano d'impianto: come sono appunto i nidi delle rondini, sia della *rustica* che della *urbica*; e come non sono i nidi dei rondoni, celati ed invisibili, appoggiati semplicemente in fondo alle oscure cavità dei loro covi. E ciò non basta: perchè SHAKESPEARE definisce ancora più esattamente il nido del *martlet*, chiamandolo il « suo pendulo letto e culla di procreazione, *his pendent bed and procreant cradle* »: quale è appunto il nido delle rondini. E non basta ancora: perchè nella scena nona del secondo atto del *Merchant of Venice* egli descrive di nuovo il *martlet*, che « costruisce all'intemperie sul muro esterno, *builds in the weather on the outward wall*. » E qui non vi può essere più alcun

dubbio sull'interpretazione del *martlet*: tant'è vero, che l'editore del *Merchant of Venice*, Charles KNOX POOLER, nella stessa collezione dell'*Arden Shakespeare*, in cui il CUNINGHAM, aveva, come s'è visto, definito il *martlet* per rondone, *swift*, il POOLER, dico, giustamente lo chiarisce quale *house-martin*, *Hirundo tectoria*.

Questi nidi delle rondini, costruiti sulle pareti esterne dei muri e, per quanto riparati dai cornicioni e dalle grondaie, esposti all'aria, alla pioggia ed al vento, mi ricordano, per incidente, una costruzione umana, che la gentile amica, signora Lucile BECKETT CZERNIN FROST, studiosa di filosofie e religioni dell'Oriente ed autrice del libro *The World Breath*, London, Rider, 1935, ha fatto fabbricare, come sua dimora, all'estremità del promontorio *Cimbrone* a Ravello, proprietà di suo fratello, lord GRIMTHORPE, strapiombante da 250 metri sul mare, facendola attaccare alla ripida parete, come nido di rondine, e chiamandola appunto *La Rondinaia*. Così, in questo caso, è stato proprio il nido della rondine a dare la norma per la casa dell'uomo.

Vediamo, ora, come il BREHM, nella sua *Vita degli animali*, descrive il nido, sia della rondine comune che del balestruccio. La rondine domestica, dice il BREHM, nidifica in tutta l'Europa, di qua dal circolo polare, nonchè nell'Asia occidentale e centrale. Fin dai tempi più remoti quest'uccello si è volontariamente avvicinato all'uomo e ha preso dimora nelle sue abitazioni, sempre che le è stato permesso. Solo dove mancano luoghi più adatti, si contenta delle cornici di ripide pareti rocciose, ma, appena può, cambia quella dimora con le case degli uomini. Questo avvicinamento alle abitazioni ha valso alle rondini le simpatie degli uomini; e la loro regolare comparsa e dipartita, nelle regioni nordiche, le hanno fatte da lungo tempo considerare come apportatrici di giorni lieti e felici, in primavera ed estate, e come premonitrici di giorni tristi e rigidi, in autunno ed inverno. Appena la rondine giunge, in primavera, attacca il suo nido alla parete esterna delle case, sotto le travi, le grondaie e le cornici. Il nido ha press'a poco la forma di un quarto di sfera cava, con le pareti più spesse nei punti attaccati al sostegno; l'orlo, quasi orizzontale, è anche un pò rialzato nei punti di attacco; la larghezza è di circa 20 cm., la profondità di 10 cm. È fatto di terra argillosa o grassa che l'uccello raccoglie col becco e poi cementa accuratamente. Fini fuscelli e peli, stipati nelle pareti, ne aumentano la solidità: ma il cemento è sempre costituito dalla saliva. Se il tempo è buono, una coppia di rondini completa la costruzione delle pareti in una settimana; poi ne riveste l'interno con tenere pagliuzze, peli, penne ed altre sostanze morbide; e prepara così la culla per i nidiacei. Un nido di rondine, collocato in un luogo riparato, serve per moltissimi anni, e forse non solo ai costruttori stessi, ma anche alle generazioni successive. Come si vede, il BREHM dice con molte parole e con minuti particolari, quali si addicono ad uno scienziato, quel che il sommo poeta ha condensato nelle po-

che immagini di *loved mansionry, pendent bed and procreant cradle*: così come l'altro sommo poeta, due millenni e mezzo prima di lui, disse quel che è ancor vivo per noi: facendoci sentire la vibrazione della corda dell'arco, simile al garrito della rondine, e facendoci apparire Minerva, simile alla rondine sul tetto. Questi grandi geni, luminari dell'umanità creano immagini per l'eternità: per la nostra, naturalmente, relativa eternità. Essi sono quelli, come bellamente si esprime KLEIST, di cui la notturna lampada illumina tutta la terra: *Die, deren nächtliche Lampe den ganzen Erdball erleuchtet*.

Da tutto questo credo che risulti evidente, che il *martlet*, descritto da SHAKESPEARE nel *Macbeth* e nel *Merchant of Venice*, non è il rondone, come alcuni hanno creduto, ma è la rondine, e propriamente la *Hirundo urtica*, che SHAKESPEARE fa vivere innanzi a noi con l'immortalità della rappresentazione artistica.

Questa relativa immortalità della rappresentazione artistica mi richiama alla mente quel che SCHOPENHAUER scrive, nel capitolo 41 del secondo volume del suo *Mondo quale volontà e rappresentazione*, sulla caducità degli individui e sull'eternità dell'*idea* platonica delle specie da essi rappresentate: e ciò proprio a proposito delle rondini e di altri animali a noi familiari. Ci si chieda onestamente, egli dice, se la rondine della presente primavera sia in tutto e per tutto un'altra che quelle delle precedenti, e se realmente tra esse si sia rinnovato per milioni di volte il miracolo della creazione dal nulla, solo per precipitare altrettante volte nell'annientamento assoluto della morte. So bene, che, se io dicessi ad uno, che la gatta, la quale ora appunto gioca in casa, è ancora la stessa, che nei secoli scorsi faceva gli stessi salti e scherzi, egli mi riterrebbe pazzo; ma io so anche, che è molto più pazzesco il credere che la gatta odierna sia fundamentalmente diversa da quella dei secoli passati. Si deve lealmente e seriamente immedesimarsi nella contemplazione di uno di questi animali, per comprendere intimamente, che questo incomprensibile essere, così come esiste, preso nel tutto, non può assolutamente cadere nel nulla: eppure d'altra parte conosciamo la sua transitorietà. Questo dipende dal fatto, che in quest'animale l'eternità della sua idea, o specie, è stampata nella caducità dell'individuo. La vista di ogni animale ci insegna, che la morte non impedisce le manifestazioni dell'essenza, o volontà, della vita. Quale imperscrutabile mistero v'è in ogni animale! Guardate quello a voi più vicino, guardate il vostro cane: come sta queto e contento. Molte migliaia di cani hanno dovuto morire, prima che a questo toccasse di vivere. Ma il trapasso di quelle migliaia non ha intaccato l'*idea* del cane, che non è stata minimamente turbata da tutto quel morire. Perciò il cane sta innanzi a noi così fresco e forte, come se questo fosse il suo primo giorno e non potesse mai essere l'ultimo; e nei suoi occhi splende il suo indistruttibile principio, l'*archaeus*. E che cosa allora è morto durante i trascorsi millenni? Non il

cane: esso sta intatto innanzi a noi; solo la sua ombra, la sua immagine nella nostra conoscenza, legata al tempo. Come si può credere, che trapassi quel che sempre esiste e riempie tutto il tempo? Certo, la cosa si può empiricamente spiegare: cioè, a misura che la morte distruggeva gli individui, la generazione ne produceva di nuovi. Ma questa spiegazione empirica è solo apparentemente tale: essa pone un mistero al posto dell'altro. L'intelligenza metafisica della cosa, se anche non tanto facile ad avere, è però la sola vera e soddisfacente.

Un barlume di questa intelligenza ce lo dà appunto la rappresentazione artistica, che, portandoci fuori dalle categorie dello spazio e del tempo, ci mette nello stato di beatitudine della pura contemplazione. Ne abbiamo visto un esempio nella rappresentazione, che SHAKESPEARE dà delle rondini nel *Macbeth*. Ne possiamo vedere un altro nella descrizione, che OMERO dà del cane di Ulisse, nel canto XVII dell'*Odissea*. Risentiamolo, nella traduzione di ROMAGNOLI:

Il cane Argo qui dunque giacea, tutto pieno di zecche.

E appena, ecco, s'accorse d'Ulisse, che gli era vicino,

scosse la coda, entrambe lasciò ricadere le orecchie;

ma poi forza non ebbe di farsi dappresso al padrone.

E questi le pupille distolse, una lagrima terse,

senza ch'Eumeo lo vedesse, chè seppe nascondersi.....

Ed Argo fu ghermito dal fato di livida morte,

poscia ch'egli ebbe, dopo venti anni, rivisto il signore.

Questo è il vero, il grande miracolo dell'arte, che nessuna scienza può eguagliare. Il quadro, visto da OMERO nella sua fantasia e da lui rappresentato, è ancor vivo e fresco come nel primo giorno della sua creazione. Ed in esso c'è, per noi, non solo il godimento estetico dell'episodio, rappresentato *sub specie aeternitatis* nella sua figurazione esteriore, ma anche il brivido interiore, che ci fa sentire l'unità cosmica della lagrima dello eroe e dell'arresto del cuore del suo cane: l'identità della vita universale, per cui gli antichi Indiani avevano coniato la formula upanisciadica: Questo sei tu — *Tat tvam asi*.

TIGRI ANTROPOFAGHE

Nota del socio Giuseppe De Lorenzo

(Pervenuta all'Accademia in ottobre 1951)

Sunto. — In questa Nota si prende lo spunto dalla presenza sporadica di tigri antropofaghe, per indicare qual'è la funzione della tigre normale nell'economia rurale e nella vita sociale dell'India, e per illustrare il singolare fenomeno storico, che la tigre, *felis tigris regalis*, solo da poco più di duemila anni ha invaso l'India, prima tutta occupata dal leone, *felis leo*, respingendolo e confinandolo sempre più a nord-ovest della penisola, della quale essa ora tiene incontrastata, tra i felini, il supremo dominio.

Verso la fine del secolo scorso, nel 1897, il noto scrittore e famoso umorista americano MARK TWAIN, nel suo ultimo libro di viaggi, *More Tramps abroad*, descrivendo l'India, volle studiare le statistiche, tenute dal governo britannico, delle persone uccise dalle bestie feroci e dai serpenti velenosi, e delle uccisioni, ordinate dallo stesso governo, degli animali omicidi. E trovò, che durante sei anni, da lui studiati, il bilancio si manteneva quasi sempre costante. In confronto di quasi centomila uomini, uccisi ogni anno dai serpenti, il governo aveva fatto distruggere più di un milione di serpenti; ed in compenso di circa diecimila uomini, uccisi dagli animali selvaggi, il governo aveva fatto ammazzare più di ventimila animali selvaggi. Tra questi il primato, non assoluto, ma relativo, proporzionale, è tenuto dal signore della giungla, l'elefante selvaggio, *elephas indicus*, che uccide ogni anno una cinquantina di uomini, per cinque della sua specie, uno per dieci: mentre il primato assoluto è tenuto dalla tigre, che uccide circa ottocento uomini l'anno, soccombendo per il doppio. Naturalmente, in questa reciproca strage l'uccisione degli animali è dovuta principalmente agli europei, perchè gli indiani, per la loro concezione della *ahimsa*, non si oppongono con la violenza al male: gli hindu, dice MARK TWAIN, per la loro religione, non tolgono mai la vita a qualsiasi creatura, ma risparmiano anche i serpenti e le tigri e le pulci ed i topi: *the Hindoos, because of their religion, never take the life of any creature, but spare even the snakes and tigers and fleas and rats*. Per questa, e per altre ragioni, il TWAIN abbandona, una volta tanto, la sua vena umoristica ed il tono sarcastico ed intona un vero inno di gloria per l'India: « Questa è infatti l'India! La terra dei sogni e della romanza, della ricchezza favolosa e della favolosa povertà, di splendori e di stracci, di pa-

lazzi e tuguri, di peste e carestia, di geni e giganti, di lampade di Aladino, di tigri ed elefanti, il cobra e la giungla, la terra di cento nazioni e cento lingue, di un migliaio di religioni e milioni di dei, culla di razze umane, fonte di linguaggi, madre della storia, ava della leggenda, bisavola della tradizione — la sola contrada sotto il sole dotata di interesse imperituro per il principe ed il contadino, il dotto e l'ignorante, il saggio e lo stolto, il ricco ed il povero, la sola terra, che tutti gli uomini desiderano di vedere, e, avendola una volta vista, anche per un baleno, non darebbero quel baleno per le vedute, prese insieme, di tutto il resto del globo. » Vediamo ora, come a questo panegirico dell'umorista americano corrispondano altre osservazioni e descrizioni dell'India, siano esse europee od indiane, recenti od antiche, riguardanti specialmente le tigri nelle loro relazioni con gli uomini: prima di tutto le tigri antropofaghe e poi le tigri in generale.

Poco prima del citato libro di MARK TWAIN erano apparsi, nel 1894, e 1895, i due famosi *Jungle Books* di RUDYARD KIPLING, in cui una delle figure principali è *Shere Khan*: la tigre regale, resa inabile alla caccia grossa per un'azzoppatura e divenuta, quindi, una malefica mangiatrice d'uomini. Essa è troppo nota a piccoli e grandi, perchè sia necessario su essa soffermarsi. Meno noti e più recenti sono due libri di JIM CORBETT: uno sulle mangiatrici d'uomini del Kumaun, *Man-Eaters of Kumaun*, del 1943, pubblicato in italiano dal Longanesi, e l'altro sul leopardo antropofago, *The Man-Eater Leopard of Rudraprayag*, del 1950, apparso in italiano nei Quaderni della Medusa. Nella prefazione al primo, lord LINLITHGOW, vicerè dell'India dal 1936 al 1943, scrive: « In larghe zone delle Provincie Unite il nome dell'autore è familiare agli indigeni dei villaggi come quello dell'uomo, che li ha liberati dal terrore dovuto a una crudele e feroce presenza di una tigre o di una pantera mangiatrice d'uomini. La distruzione di questi animali rari e pericolosi è un compito di grande importanza, sia per la popolazione che per il governo. »

E del secondo libro il noto scrittore americano ERNEST HEMINGWAY ha scritto: « È il più bel libro di cacciatori e cacciati che io abbia mai letto. È scritto così bene che ti sembra di averlo vissuto. Vi è in esso bellezza, terrore, verità. »

Ma il CORBETT non è un cacciatore di professione. Cresciuto nell'India, innamorato e conoscitore profondo della vita vegetale, animale ed umana dell'India, ufficiale delle truppe indiane, combattenti nella prima e nella seconda guerra mondiale, egli ha messo solamente le sue conoscenze, la sua resistenza fisica ed il suo impavido coraggio al servizio delle povere popolazioni indigene delle pendici subhimàlayane, per liberarle dal terrore delle stragi, perpetrate dalle tigri antropofaghe; che egli però ammira e sdegna di uccidere con trappole e veleni e vuole solo affrontare col fucile, a faccia a faccia, a tu per tu. Per le tigri normali, invece, le quali non attaccano

l'uomo, ma aggrediscono solo gli animali selvaggi, di cui si cibano, il CORBETT è della stessa opinione della maggiore autorità in questo campo, il SANDERSON, il quale scriveva: « La tigre non è affatto dannosa per se stessa: perchè i porci selvaggi ed i cervi, e non già le tigri e le pantere, sono quelli che minacciano l'equilibrio e la vera vita dell'agricoltura nell'India; e quindi, per distruggerli, non c'è altro mezzo, che quello di farli divorare dalle tigri, di cui costituiscono il cibo principale. » Ma, a volte le tigri normali, per vecchiezza e conseguente debilità e perdita di denti, o per ferite di armi umane, o di cornate, od infissioni di aculei di istrichi, che esse abbattano a zampate, perdono la capacità di ammazzare i bufali ed i cinghiali e la velocità per raggiungere i cervi e le antilopi, ed allora, se hanno una volta sorpreso, ucciso e mangiato qualche donna o bambino, diventano irrevocabilmente antropofaghe e mangiatrici di animali domestici e gettano spavento e terrore per centinaia di chilometri quadrati. Ed allora, siccome la vita di una tigre non vale quella di centinaia di uomini e la sicurezza di altre migliaia, interveniva quale esecutore di giustizia il colonnello CORBETT con le sue azioni sagaci e coraggiose, che egli così efficacemente ha esposto nei suoi due bellissimi libri.

Nei quali egli non solo descrive l'incredibile astuzia, cui giunge una tigre od una pantera antropofaga, ma dà un quadro terrificante di quel mondo, ove la realtà è cruda e sottoposta alla terribile legge dei denti e degli artigli: la legge della giungla. Ed in tale quadro non mancano pennellate di luce, date da manifestazioni di eroico coraggio da parte di quella gente indiana, che vive inerme in quell'armatissimo mondo. Così l'episodio delle due sorelle di Champawat, le quali « si trovavano un giorno a tagliare l'erba sulla montagna che sovrasta la loro capanna, quando la tigre apparve improvvisamente e portò via la maggiore delle due. Per un centinaio di metri la più giovane corse appresso alla tigre brandendo la falce e gridando all'animale, di lasciare la sorella e prendere lei al suo posto; mentre la tigre, dopo aver trascinato la donna morta per circa cento metri, la lasciò, si volse verso l'inseguitrice e con un alto ruggito balzò sulla coraggiosa donna... Questo incredibile atto d'eroismo fu testimoniato da tutti gli abitanti del villaggio. » Ed anche l'episodio del *thahstildar*, o capo del villaggio di Champawat; il quale, essendo andato a far visita a CORBETT nel suo lontano *bungalow* ed essendo sopravvenuta la notte, disse, che doveva ritornare presso i suoi paesani e se n'andò nella paurosa oscurità, su cui incombeva la tigre antropofaga, malgrado tutti gli scongiuri di CORBETT: « Non era il pensiero della notte che mi turbava, ma il rischio, a cui si esponeva; comunque, fu sordo a tutti i miei argomenti e, quando s'incamminò fuori della veranda nella notte buia, per percorrere quattro miglia in una zona, dove la gente si muoveva solo in grandi gruppi e alla luce del giorno, mi tolsi il cappello di fronte ad un uomo così coraggioso... Nelle remote zone, in cui operano le tigri mangiatrici d'uomini, vengono

compiuti spesso atti di vero eroismo, che gli indigeni considerano come casi ordinari della vita, che il mondo esterno non ha modo di conoscere.» E qui il CORBETT narra il caso, veramente mirabile, della tigre di Kanda. Un giovane di diciotto anni era andato sulla montagna a raccogliere foglie per il foraggio delle vacche ed era stato ucciso dalla tigre. A sera il padre ritornò dal pascolo, sistemò i vitelli nella stalla e, non avendo trovato il figlio, ne chiese ai vicini che non seppero dargli notizia. « La notte stava per scendere. L'uomo tornò a casa ed accese una piccola lanterna fumosa. Mentre attraversava il villaggio, terrificò i suoi vicini dicendo loro, in risposta alle loro domande, che andava a cercare suo figlio. Gli fu chiesto se si era dimenticato della tigre, e rispose che era proprio per questo, che era così ansioso di trovare suo figlio; era possibile che fosse caduto da un albero, che si fosse ferito e, per paura di attirare la tigre, non avesse risposto al suo richiamo. Non chiese a nessuno di accompagnarlo. Per tutta la notte cercò su e giù per quelle valli, in cui nessuno aveva più osato di metter piede. Quattro volte durante la notte, come vidi poi dalle sue impronte, era passato a tre metri dal punto, in cui la tigre stava divorando suo figlio. Stanco infine ed abbattuto, si arrampicò per un sentiero sulla collina rocciosa, quando già cominciava a far luce, e sedette per riposare. Da quella posizione elevata si arrivava a vedere nel burrone. All'alba vide un luccichio di sangue sulle due grandi rocce, si precipitò, e trovò tutto ciò, che la tigre aveva lasciato di suo figlio. Radunò quei resti e tornò a casa. Quando si fu procurato un pezzo di stoffa adatto, i suoi vicini lo aiutarono a trasportare i resti alla gradinata crematoria del fiume Mandel, perchè le ceneri potessero defluire nel Gange e quindi nel mare. Secondo me, non sarebbe esatto asserire, che tali gesta, come queste ora descritte, vengano compiute da individui privi d'intelligenza e che quindi non comprendono il grave pericolo che corrono. Gli abitanti di queste montagne sono, invece, assai sensibili a quanto li circonda. Un uomo, cresciuto in questi paraggi e minacciato da oltre un anno da una mangiatrice d'uomini, il quale, solo ed inerme, dal tramonto all'alba, vaghi per le fitte foreste, che la sua immaginazione popola di spiriti cattivi e nelle quali ha tutti i motivi, di credere che si aggiri la tigre, possiede, a mio parere, un coraggio tale, che a pochi è dato vantare. Per di più sono sicuro, che, malgrado il suo atto di eroismo, quell'uomo non aveva affatto la sensazione, d'aver compiuto qualcosa d'eccezionale e di notevole. » Dopo questo ed altri simili casi il CORBETT ha ragione di chiudere il suo ultimo libro con parole di ammirazione, simili a quelle già scritte da MARK TWAIN: « Tale è questa gente semplice e coraggiosa delle montagne e della grande India, i cui figli possono essere conosciuti solo da coloro, che hanno avuto il privilegio di dividerne la vita. Sono questi figli della terra dal grande cuore, qualunque ne sia il credo o la casta, che salderanno un giorno, in un tutto compatto, le opposte fazioni e faranno dell'India una grande na-

zione. » Questa è la conclusione, morale e sociale, a cui porta la conoscenza ed esperienza europea delle relazioni tra gli hindu e le tigri mangiatrici d'uomini dell'India.

Ma, le tigri mangiatrici d'uomini sono un'eccezione sporadica nella regola generale della tigri normali, che in sì grande numero occupano l'India, si nutrono solo di animali selvaggi e possono quindi convivere in pace con gli uomini. Una prova di ciò, oltre molte altre che tralascio, si trova nel libro *The Holy Mountain*, pubblicato nel 1934, a Londra, con una prefazione del maggior poeta irlandese moderno, WILLIAM BUTLER YEATS; nel quale l'autore, il *bagwân* SHRI HAMSA, descrivendo il suo pellegrinaggio al sacro monte Kailâsa, nel Tibet, così narra una sua avventura con una tigre: « Nel procedere con la mia guida nepàlese attraverso una foresta, nel distretto di Tehri, ci fermammo per la notte al piede di un albero, spandemmo le nostre coperte e ci mettemmo a giacere, appoggiando la testa sulle radici. Tra noi due tenemmo acceso un ceppo, per riscaldarci. M'immersi nella meditazione e presto m'addormentai, perchè non avevo preso cibo ed avevo camminato per tutta la giornata. Verso l'una del mattino improvvisamente mi destai e mi guardai intorno, alla luce del nostro fuoco. Il mio cuore parve arrestarsi per un terribile momento. Là, con la coda che toccava i miei piedi e la testa di fronte alla mia guida, era distesa un'enorme tigre. Affascinato, io vedevo i suoi luccidi fianchi striati alzarsi ed abbassarsi con la cadenza del suo respiro, mentre si riscaldava comodamente al nostro fuoco. I miei occhi s'incontrarono con quelli della mia guida, scambiandosi con lo sguardo il messaggio: Non ci muoviamo! Il sudore mi colava dal corpo. Cercai di raccogliere i miei pensieri e di prepararmi per il primo movimento del selvaggio della giungla. Dapprima il mio cervello rifiutò di funzionare; poi, concentrandolo con tutte le forze della mia volontà, mi liberai dal panico: sì che, anche sentendo sulle mie gambe lo strofinio della coda della tigre, potevo non pensarci. Una pace mirabile discese su me. Mentre così giacevo, la tigre si sollevò e stette in tutta la sua altezza: una bestia veramente nobile a vedersi. Per un poco brontolò furiosamente, battendo il suolo con la coda. La morte mi parve vicina. La tigre annusò la mia guida, poi rivolse i suoi tremendi occhi d'ambra verso i miei piedi. Per alcuni secondi stette indecisa, poi, dopo aver fatto tre o quattro salti sopra di noi, sparì nella selva. Erano le tre del mattino. Quando l'animale se ne fu andato, la mia guida mi esortò ad allontanarci, perchè la tigre sarebbe ritornata tra un'ora o due. Così ci avanzammo nella notte buia e dopo un paio di miglia ci fermammo, per riaddormentarci. » Ecco, dunque, come si comportano la tigri, quando non siano antropofaghe, con gli uomini, quando questi non mostrino paura. Perchè gl'indiani ritengono, che è l'odore della paura che eccita gli animali all'aggressione: il che effettivamente possiamo sperimentare anche noi di fronte ai cani aggressivi.

Tal'è dunque la tigre, la nobile bestia dalla pelle striata di nero e d'oro, dal corpo agile e forte, dagli occhi d'ambra, il portentoso animale rappresentativo dell'India, la tigre regale, che in India ha tanti nomi: *vyāghra* in sanscrito, *bagh*, *sher* e *nahar* in hindî, *wahag* in marattî, *kya* in barmese, *hariman* in malese, etc. Il suo ritratto è scolpito nella famosa poesia di WILLIAM BLAKE, così tradotta da MARIO PRAZ:

Tigre! Tigre! o, nella selva
della notte ardente belva,
che immortali occhi o mani
ti foggîâr le forme immani?

Da che abisso o ciel l'accolto
fuoco ne' tuoi occhi è tolto?
e salla su quali penne?
quale mano il fuoco tenne?

E quale arte e qual vigore
torse i nervi del tuo cuore!
quando il cuore tuo battè,
che tremenda man, che piè?

Qual catena? qual martello?
da che forno il tuo cervello?
e qual morsa strinse i crudi
suoi furori? quale incudine?

Quando giù gittar le spade
gli astri e piansero rugiade,
rise lui dell'opra? Quello
fece Te, che fe' l'Agnello?

Tigre! Tigre! o, nella selva
della notte ardente belva,
che immortali occhi o mani
ti foggîâr le forme immani?

Ora, quest'animale portentoso, la tigre, non solo è l'animale rappresentativo per eccellenza dell'India, ma è anche un animale esclusivo dell'Asia; mentre il suo congenere, il leone, è stato ed è un'animale caratteristico di tutto il continente antico: dell'Asia, dove gli ultimi suoi discendenti si trovano tra l'India nord-ovest e l'Iran; dell'Europa, di dove è sparito, lasciando solo il ricordo del leone nemeo e dei leoni di OMERO; e dell'Africa, dove ancora vive e prospera in abbondanza, dalle sponde del Mediterraneo a quelle dell'Oceano Atlantico e dell'Indiano. Geologicamente, alla fine del terziario ed al principio del quaternario vivevano insieme nell'India i progenitori dell'una e dell'altra specie, il grande leone speleo e l'enorme e spaventosa tigre dai denti a sciabola, *Machaerodus cultri-*

dens, di cui gli avanzi si trovano negli strati di *Sivalik*, delle pendici subhimàlayane. Attualmente, però, come ho detto, il leone s'è ridotto a pochi esemplari, confinati nell'India nord-ovest; mentre la tigre domina sovrana in tutta l'India, anteriore e posteriore, nella Malesia e nell'Indocina, spingendosi per la Cina occidentale e settentrionale fino ai confini della Manciuria e della Siberia, dove per il freddo s'ingigantisce e si copre d'un lungo e folto pelame. Ma, se passiamo dai tempi geologici e preistorici e dagli avanzi paleontologici ai tempi protostorici e storici ed ai loro ricordi e monumenti, troviamo, che i rapporti non sono stati sempre gli stessi, ed assistiamo ad uno strano e misterioso alternarsi delle due grandi specie di felini nel dominio quasi assoluto dell'India.

Se, infatti, esaminiamo i monumenti e documenti archeologici, provenienti dagli scavi della più antica civiltà indiana, quella di Harappa e di Mohenjo-Daro, fiorita nella valle dell'Indo tra il 3250 ed il 2750 avanti Cristo, scoperta nel 1822 da John MARSHALL e R. D. BANERJI, descritta dal MARSHALL nella sua grande opera *Mohenjo-Daro and the Indus Civilization*, London 1931, ed esposta riassuntivamente da R. K. MOOKERJI nel suo bel libro *Hindu Civilization*, London 1936, non troviamo in essa alcuna figurazione od indicazione del leone, mentre la tigre vi è effigiata in modo bellissimo e modernissimo, incisa e scolpita nei numerosi sigilli ed amuleti, di pietra, ceramica e terraccotta, specialmente nella grande placchetta, raffigurante il dio Siva in trono, come signore degli animali o *pasupati*, circondato dagli animali più caratteristici dell'India: le antilopi, il bufalo, il rinoceronte unicorno, l'elefante indiano e la tigre, balzante e ruggente.

Se ora, invece, passiamo da tale civiltà protostorica della valle dell'Indo a quelle seguenti di tutta l'India, dal Himàlaya al mare, dal 2500 fin circa al 500 avanti Cristo, nei ricordi e nei testi della rivelazione, *sruti*, e della tradizione, *smriti*, delle successive culture vediche, brāhmaniche, giainistiche, buddhistiche e hinduistiche, troviamo sparita quasi ogni traccia o menzione della tigre; al posto della quale campeggia sempre il leone, in tutte le manifestazioni artistiche e culturali di quei due millenni.

Ma, ecco che, poco dopo la fine di quei due millenni, nel quarto e terzo secolo prima di Cristo, mentre ancora in tutta l'India domina incontrastato il leone, comincia anche a comparire di nuovo, sporadicamente, la tigre: sia nelle menzioni degli europei, che nelle figurazioni degli indiani. NEARCO, l'ammiraglio di ALESSANDRO, che nel 325 a. Cr. condusse la flotta dall'Indo a Babilonia, riferisce, di aver visto una pelle di tigre, ma non l'animale vivo. Tre secoli dopo, STRABONE nella sua *Geografia* scrive della tigre dell'India; e, pochi anni dopo, PLINIO racconta, che SCAURO, nel 743 di Roma (11 a Cr.), aveva fatto venire la prima tigre viva dall'India a Roma. Contemporaneamente la tigre comincia pure ad apparire nei testi indiani. Nella più antica raccolta delle favole di animali, il *Jātaka* buddhistico, posteriore a quei due millenni, ma anteriore all'era volgare, c'è il racconto 189, del-

l'asino nella pelle di leone; che ha avuto poi tanta voga nelle favole di ESOPPO. Ma nei testi seriori, in cui però sempre il protagonista è il leone, appare già l'asino nella pelle di pantera, nel *Tantrākhāyika*, e l'asino nella pelle di tigre del *Pancatantra* e del *Hitopadesa*.

Nei due millenni precedenti, però, non c'è che il leone. Negli inni del *Rigveda* i venti della tempesta, i *Maruts*, ruggiscono come leoni, specialmente quando soffiano su *Agni*, il fuoco che divora le foreste. Una delle discese, o *avatar*, di Visnu è quella del *narasinha*, o uomo-leone. Nei più antichi testi buddhistici non si trova che il leone, con qualche rarissimo e vago accenno alla tigre. Il BUDDHA SAKYAMUNI è sempre paragonato al leone. Egli è sempre descritto e figurato col robusto torace, l'ampio petto, la vita sottile ed il *mentum prominulum* del leone; procede solo e senza paura come il leone; e quando si stende sulla terra, per dormire, si corica sul destro fianco, un piede sull'altro, a guisa di leon, quando si posa.

L'espressione di ruggito di leone, *sīhanādo*, come simbolo dell'esposizione della Dottrina, è sempre sinteticamente usata in tutti i discorsi di BUDDHA; ma è anche analiticamente esposta in un discorso del *Samyuttakanikāyo*, ed. siamese vol. III, p. 75 (PTS 84), ed è stata messa in luce da KARL EUGEN NEUMANN nella nota 14 alla sua traduzione del discorso XXIV del *Dīghanikāyo*. Ed è veramente singolare (sia qui detto solo per incidente), come quell'antica descrizione indiana trovi, dopo due millenni, quasi come un'eco, in un sonetto di GIORDANO BRUNO della seconda parte *De gli eroici furori*, in cui il volo dell'aquila ed il ruggito del leone passano tra cielo e terra, per annunziare al mondo l'apparizione della loro potenza.

Avida di trovar bramato pasto
L'aquila verso il ciel spiega l'ali,
Facendo accorti tutti gli animali,
Ch'al terzo volo s'apparecchia al guasto.
E del fiero leon ruggito vasto
Fa da l'alta spelunca orror mortali,
Onde le belve presentando i mali,
Fuggon a gli antri il famelico impasto.

La potenza enorme del ruggito del leone, quale ancor oggi può sentirsi nelle selvagge notti africane, si trova efficacemente descritta nel libro *The black Laughter* di Llewelin Powis: «Una ripercussione cupa, pesante, come un tuono distante, che s'alza e s'abbassa e muore in un sospiro. Remoto, come il suono indubbiamente è, la sua forza ed il suo volume sono sì grandi, che la vuota volta della notte ne ritiene il rimbombo anche molto dopo che il reale ruggito s'è smorzato. E quale minaccia è in esso!» Tale è, dunque, il ruggito del leone.

Ecco ora, il passo del su citato testo buddhistico, col paragone del ruggito del leone: « Quando il leone, il re degli animali, lascia la sera il covile, si stira e si stende, si guarda tutt'attorno in giro, fa risonare tre volte il suo ruggito e si muove alla preda. Ed ora tutti gli altri animali, che hanno sentito il suono del ruggito del leone, si turbano, s'impauriscono e si spaventano; fuggono di caverna in caverna, di macchia in macchia, di selva in selva, e gli uccelli si levano a volo. Perfino gli elefanti regali, chiusi e legati nelle stalle e nei castelli, strappano e calpestando le cinghie e le funi, si scaricano, per la paura, di feci e di orina e cercano scampo qua e là. Così forte, così possente, così dominante è il leone su tutti i comuni animali. Or così anche appunto, quando appare nel mondo il Compunto, il santo, perfetto Svegliato, il provato di sapienza e di vita, il Benvenuto, il conoscitore del mondo, l'incomparabile duce dell'umano gregge, il maestro degli uomini e degli dei, lo Svegliato, il Sublime, egli espone la Dottrina: " Così è la forma, così sorge, così trapassa; così è la percezione, così sorge, così trapassa; così è la concezione, così sorge, così trapassa così è la coscienza, così sorge, così trapassa. „ Ora anche quelli, che forse sono dei di lunga durata, di vita beata, di sede eccelsa, anch'essi sentono il suono della Dottrina, esposta dal Sublime, e si turbano, s'impauriscono, si spaventano: " Instabili, ahimè, siamo anche noi, che ci credevamo stabili! Perituri siamo anche noi, che ci credevamo imperituri! Mortali siamo anche noi, che ci credevamo immortali! Anche noi, dunque, siamo transitori, impersistenti, caduchi, di forme fugaci. „ Così forte, così possente, così dominante è l'annuncio del Sublime anche sul mondo degli dei. » Naturalmente, questo paragone, e gli altri, del BUDDHA, così come le parabole di Gesù, servono solo per illustrare le loro concezioni psicologiche, morali e religiose. A noi, in questo caso, servono solo per illustrare la posizione dominante, che aveva ancora il leone nell'India, tra il sesto ed il quinto secolo avanti Cristo; quando cominciava il nuovo forse a riapparirvi, dopo due millenni di sparizione; la tigre che doveva poi come innanzi se detto, respingere gradatamente il leone verso nord-ovest, dove ancor ne sussistono gli ultimi avanzi sparuti; per rimanere essa, la *felis tigris regalis*, fino ad oggi, la dominatrice assoluta dell'India.

Questo è l'oscuro problema di tale alterno fluttuare, con onde della lunghezza di due millenni, del dominio del leone e della tigre nell'India. La soluzione di tale problema può essere data da chi sia, insieme, archeologo, storico, filologo e naturalista.

FORMA ESPLICITA DELLE FUNZIONI $\text{sen } \xi$, $\text{cos } \xi$, e^ξ NEL CAMPO IPERCOMPLESSO

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — Si determinano le forme esplicite delle funzioni $\text{sen } \xi$, $\text{cos } \xi$, e^ξ con ξ variabile in un dato tipo di algebra definita nel corpo complesso, dotata di modulo.

1. — Generalità.

Nel 1933 ho dimostrato il seguente teorema sulle serie di potenze nel campo ipercomplesso: ¹⁾

1) *Data una serie di potenze di variabile complessa*

$$(1) \quad F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

ed un'algebra complessa A , dotata di modulo u , condizione necessaria e sufficiente affinché la serie:

$$(2) \quad F(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m$$

con ξ elemento di A sia convergente è che le radici dell'equazione minima di ξ cadano nel cerchio di convergenza della serie $F(z)$.

In particolare se $F(z)$ è convergente in tutto il piano di GAUSS, la serie $F(\xi)$ risulta convergente qualunque sia l'elemento ξ dell'algebra A . Il teorema I è dimostrato come applicazione del *teorema fondamentale* che ho dimostrato nella memoria citata in ¹⁾, che dà la condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di potenze:

$$(3) \quad P(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \xi^m$$

con i coefficienti α_m pure nell'algebra A , risulti convergente.

Fra le serie del tipo (1) convergenti in tutto il piano di GAUSS vi sono quelle che definiscono nel campo complesso le tre funzioni $\text{sen } \xi$, $\text{cos } \xi$.

¹⁾ N. SPAMPINATO *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità dotata di modulo.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo LVII

ed e^{ξ} . Per il teorema I) mi è stato quindi possibile definire le funzioni $\text{sen } \xi$, $\cos \xi$, ed e^{ξ} nell'algebra $A^{2)}$ con le posizioni:

$$\text{sen } \xi = \xi - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} - \frac{\xi^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \xi = u - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!} + \dots$$

$$e^{\xi} = u + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots$$

con ξ qualunque in A .

Resta però [per ogni fissata algebra A ad n unità, diciamo u, u_1, \dots, u_{n-1} , essendo u il modulo] il problema di determinare, posto per la variabile ξ in A :

$$\xi = z u + z_1 u_1 + \dots + z_{n-1} u_{n-1}$$

e posto per una funzione $F(\xi)$ in A .

$$F(\xi) = f_0(z, \dots, z_{n-1}) u + f_1(z, z_1, \dots, z_{n-1}) u_1 + \dots + f_{n-1}(z, z_1, \dots, z_{n-1}) u_{n-1},$$

le funzioni f_0, f_1, \dots, f_{n-1} nel caso in cui la $F(\xi)$ sia la funzione $\text{sen } \xi$, $\cos \xi$, e^{ξ} . S'intende che il tipo delle funzioni f_0, \dots, f_{n-1} dipende, in ogni caso, non solo dalla funzione che si considera, ma anche dalla tabella di moltiplicazione con cui si moltiplicano le unità $u, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ dell'algebra A .

2. — Caso biduale.

Nel caso della variabile biduale $\xi = z u + z_1 u_1$ con la tabella di moltiplicazione:

	u	u_1
u	u	u_1
u_1	u_1	0

si ha:

$$\xi^n = z^n u + n z^{n-1} z_1 u_1$$

²⁾ Loc. citato ¹⁾, Nota III del caso b del n. 8 della parte seconda.

e quindi:

$$e^{\xi} = \sum \frac{\xi^n}{n!} \left(\sum \frac{z^n}{n!} \right) u + z_1 \left(\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right) u_1$$

Si ha perciò:

$$[1] \quad e^{\xi} = e^z u + z_1 e^z u_1$$

Si ha inoltre, per definizione:

$$\text{sen } \xi = \sum (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

da cui:

$$\text{sen } \xi = \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} u + \left(\sum \frac{z^{2n}}{2n!} \right) z_1 u_1$$

e quindi:

$$[2] \quad \text{sen } \xi = \text{sen } z u + z_1 \cos z u_1$$

Si ha infine, per definizione:

$$\cos \xi = \sum (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{2n!}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} u + z_1 \left(\sum (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) u_1 = \\ &= \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} u + z_1 \left(- \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) u_1 \end{aligned}$$

e quindi:

$$[3] \quad \cos \xi = \cos z - z_1 \text{sen } z u_1$$

Nota: Si osservi esplicitamente che le funzioni date dalle [1], [2], [3] sono del tipo di quelle che danno le funzioni di variabile biduale totalmente derivabile ³⁾:

$$F(\xi) = f_0(z) u + [z_1 f'_0(z) + \varphi_1(z)] u_1$$

³⁾ N. SPAMPINATO. *Lezioni di Geometria Superiore*, vol. V, Parte II, n. 3, Napoli, Edit. Pironti.

e precisamente rispondono ai tre casi:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & f_o(z) = e^z & \varphi_1(z) \equiv 0 \\ 2^\circ & f_o(z) = \operatorname{sen} z & \varphi_1(z) \equiv 0 \\ 3^\circ & f_o(z) = \cos z & \varphi_1(z) \equiv 0 \end{array}$$

Si noti che la $\varphi_1(z)$ risulta sempre identicamente nulla.

3. — Caso triduale o in generale n-duale.

Se $\xi = z u + z_1 u_1 + \dots + z_{n-1} u_{n-1}$

(con $z, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ variabili complesse) è la variabile n-duale, con la tabella di moltiplicazione:

	u	u_1	u_2	u_{n-1}
u	u	u_1	u_2	u_{n-1}
u_1	u_1	0	0	0
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots
u_{n-1}	u_{n-1}	0	0	0

si ricava, come sopra che è:

$$[3] \quad e^\xi = e^z u + z_1 e^z u_1 + \dots + z_{n-1} e^z u_{n-1}$$

$$[4] \quad \operatorname{sen} \xi = \operatorname{sen} z u + z_1 \cos z u_1 + \dots + z_{n-1} \cos z u_{n-1}$$

$$[5] \quad \cos \xi = \cos z u - z_1 \cos z u_1 + \dots - z_{n-1} \cos z u_{n-1}$$

Anche queste funzioni non solo risultano del tipo di quelle che danno le funzioni totalmente derivabili nel campo n-duale, cioè del tipo:

$$F(\xi) = f_o(z) u + [z_1 f_o'(z) + \varphi_1(z)] u_1 + \dots + [z_{n-1} f_o'(z) + \varphi_{n-1}(z)] u_{n-1}$$

e precisamente con la $f_o(z)$ rispettivamente uguale ad e^z , $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, ma le $\varphi_1(z) \dots \varphi_{n-1}(z)$ risultano sempre identicamente nulle.

4. — Caso tripotenziiale.

Nel caso tripotenziiale con:

$$\xi = z u + z_1 u_1 + z_2 u_2$$

e la tabella di moltiplicazione:

	u	u_1	u_2
u	u	u_1	u_2
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	0	0

si ha:

$$\xi^n = z^n u + n z^{n-1} z_1 u_1 + \left[n z^{n-1} z_1 + \binom{n}{2} z^{n-2} z_1^2 \right] u_2$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} e^{\xi} &= \sum \frac{\xi^n}{n!} = \left(\sum \frac{z^n}{n!} \right) u + z_1 \left[\sum \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right] u_1 + \\ &+ \left\{ z_2 \left(\sum \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right) + z_1^2 \left(\frac{1}{2} \sum \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \right) \right\} u_2 \end{aligned}$$

Ne segue che è:

$$[7] \quad e^{\xi} = e^z u + z_1 e^z u_1 + \left[z_2 e^z + \frac{1}{2} z_1^2 e^z \right] u_2$$

Per calcolare ora sen ξ si osservi in primo luogo che si ha:

$$\begin{aligned} \xi^{2n+1} &= z^{2n+1} u + z_1 (2n+1) z^{2n} u_1 + \\ &+ \left[(2n+1) z^{2n} z_2 + \binom{2n+1}{2} z^{2n-1} z_1^2 \right] u_2 \end{aligned}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} u + \frac{z^{2n}}{2n!} z_1 u_1 + \\ &+ \left[\frac{z^{2n}}{2n!} z_2 + \frac{1}{2} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} z_1^2 \right] u_2 \end{aligned}$$

Segue che è:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \xi &= \sum (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \left[\sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+2)!} \right] u + z_1 \left[\sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \right] u_1 + \\ &+ \left[\left(\sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \right) z_1 + \frac{1}{2} \left(\sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n-1)!} z_1^2 \right) \right] u_2.\end{aligned}$$

Osservando che è:

$$\sum (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = - \sum (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)+1}}{[2(n-1)+1]!} = - \operatorname{sen} z$$

si ha:

$$[8] \quad \operatorname{sen} \xi = \operatorname{sen} z \cdot u + z_1 \cos z u_1 + \left[z_1 \cos z - \frac{z_1^2}{2} \operatorname{sen} z \right] u_2$$

Andiamo ora a calcolare $\cos \xi$.

Essendo:

$$\xi^{2n} = z^{2n} u + z_1 \cdot 2n z^{2n-1} u_1 + \left[2n z^{2n-1} \cdot z_1 + \binom{2n}{2} z^{2n-2} \cdot z_1^2 \right] u_2$$

si ha:

$$\frac{\xi^{2n}}{(2n)!} = \frac{z^{2n}}{(2n)!} u + z_1 \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} u_1 + \left[\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} z_1 + \frac{1}{2} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} z_1^2 \right] u_2$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned}\cos \xi &= \sum (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!} = \left[\sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \right] u + z_1 \left[\sum (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] u_1 \\ &+ \left[\left(\sum (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) z_1 + \frac{1}{2} \left(\sum (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} z_1^2 \right) \right] u_2.\end{aligned}$$

Ora si ha:

$$a) \sum (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = - \left(\sum (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)+1}}{2(n-1)+1} \right) = - \operatorname{sen} z$$

$$b) \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n-2)!} = - \left(\sum (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-2)+2}}{(2n-2)!} \right) = - \cos z$$

e quindi:

$$[9] \quad \cos \xi = \cos z \cdot u - z_1 \sin z \cdot u_1 + \left[-z_2 \sin z - \frac{z_1^2}{2} \cos z \right] u_2$$

5. — Caso quadripotenziale.

Se A è l'algebra dei numeri quadripotenziiali con la tabella di moltiplicazione:

	u	u_1	u_2	u_3
u	u	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3	0
u_2	u_2	u_3	0	0
u_3	u_3	0	0	0

si hanno per e^ξ , $\sin \xi$, $\cos \xi$ le tre espressioni *)

$$[10] \quad e^\xi = e^z u + z_1 e^z u_1 + \left[z_2 e^z + \frac{1}{2} z_1^2 e^z \right] u_2 + \\ + \left[z_3 e^z + \frac{1}{6} z_1^3 e^z + z_1 z_2 e^z \right] u_3$$

$$[11] \quad \sin \xi = \sin z u + z_1 \cos z u_1 + \left[z_2 \cos z - \frac{1}{2} z_1^2 \sin z \right] u_2 + \\ + \left[z_3 \cos z - \frac{1}{6} z_1^3 \cos z - z_1 z_2 \sin z \right] u_3$$

$$[12] \quad \cos \xi = \cos z u - z_1 \sin z u_1 - \left[z_2 \sin z + \frac{1}{2} z_1^2 \cos z \right] u_2 + \\ + \left[-z_3 \sin z + \frac{1}{6} z_1^3 \sin z - z_1 z_2 \cos z \right] u_3$$

Anche in questo caso si verifica ogni volta che le espressioni che danno e^ξ , $\sin \xi$, $\cos \xi$ risultano non solo del tipo di quelle che danno le funzioni totalmente derivabili nell'algebra dei numeri quadripotenziiali

*) G. GUARNACCIA. *Sulle algebre complesse commutative irriducibili del 4° ordine dotate di modulo*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. IV, vol. IX, 1938-39.

N. SPAMPINATO. *Le funzioni totalmente derivabili nelle algebre complesse, dotate di modulo, commutative del 4° ordine*, Giornale di Battaglini, 1951.

cioè del tipo:

$$\begin{aligned} F(\xi) = & f_0(z)u + [z_1 f'_0(z) + \varphi_1(z)]u_1 + \\ & + \left[z_2 f'_0(z) + \frac{1}{2} z_1^2 f''_0(z) + z_1 \varphi'_1(z) + \varphi_2(z) \right] u_2 \\ & + \left[z_3 f'_0(z) + \frac{1}{6} z_1^3 f'''_0(z) + \frac{1}{2} \varphi'_1(z) + z_1 z_2 f''_0(z) + z_1 \varphi'_2(z) + \right. \\ & \left. + z_2 \varphi'_1(z) + \varphi_3(z) \right] u_3 \end{aligned}$$

e precisamente con la $f_0(z)$ rispettivamente eguale ad e^z , $\sin z$, $\cos z$, ma le $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ risultano sempre identicamente nulle.

Nota I. — L'intima ragione del verificarsi sempre di tale circostanza dipende dal fatto che le serie di potenze in ξ considerate hanno i coefficienti non nell'algebra, ma nel corpo complesso in cui l'algebra è definita. Ciò è messo in evidenza nella mia nota citata in *).

Nota II. — Nelle due note citate in *) sono considerati pure il caso quadrisemiduale, quadrisempotenziale ed il caso quadriduale.

DETERMINAZIONE DELLE FREQUENZE E DELLE LINEE NODALI DI UNA MEMBRANA ELLITTICA OSCILLANTE CON CONTORNO FISSO

Memoria della dott. Maria Josepha De Schwarz

*presentata nell'adunanza del dì 2 dicembre 1950 dal socio M. Picone
per essere inserita nel volume III della 3ª serie degli Atti*

Sunto. — Si espongono vari metodi per la determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante in modo armonico, col bordo fisso, e si calcolano 18 frequenze e le linee nodali corrispondenti di una ellisse con gli assi 1 e $\frac{1}{2}$.

UN PROBLEMA DI OTTICA STRUMENTALE IN ASTRONOMIA

Nota del socio corrispondente Attilio Colacevich

(Adunanza del dì 3 novembre 1951)

Sunto. — Si considera un riflettore astronomico a montatura Cassegrain. Nel caso che lo specchio concavo principale sia sferico, viene calcolata, nell'approssimazione del 4° ordine, la forma asferica della sezione meridiana dello specchio concavo secondario. Vengono infine dati i risultati di un calcolo rigoroso per un caso particolare, imponendo la condizione di annullamento dell'aberrazione di sfericità del sistema.

Il principale strumento di cui si serve l'astronomo per lo studio dei corpi celesti è il telescopio. A seconda degli scopi della ricerca è bene poter scegliere il tipo di telescopio: rifrattore o riflettore, strumento a lungo od a corto fuoco, a piccolo od a grande campo. Se infine due strumenti diversi permettono di raggiungere ugualmente bene lo scopo conviene, scegliere, a parità di altre condizioni, quello più economico.

Si desidera qui studiare il tipo di strumento da scegliere nel caso che esso debba servire unicamente da condensatore di flusso di radiazione; flusso che va poi ad alimentare un qualche strumento di analisi. La pratica di impiego di questo strumento indica che conviene che esso sia applicato nella parte bassa del telescopio. Si è quindi condotti ad esaminare il caso o di un rifrattore o di un riflettore con specchio secondario di rinvio. L'uso del rifrattore è da scartarsi perchè il cromatismo residuo dell'obbiettivo altera la risposta dell'analisi ed inoltre perchè la lunghezza di questi strumenti richiede grandi e costose cupole nel confronto dei riflettori di uguali caratteristiche ottiche.

Rimane da esaminare quindi il telescopio riflettore. Questi, specie se alluminato, non altera sensibilmente le caratteristiche cromatiche della sorgente. Dei due tipi possibili, è più conveniente quello Cassegrain con specchio secondario convesso in quanto più corto e meglio corretto otticamente del corrispondente tipo Gregory con specchio secondario concavo.

Diciamo a questo punto che, stabilito tale tipo di strumento, una soluzione si presenta come di gran lunga la migliore per un buon strumento splendidamente corretto dal punto di vista ottico e che per di più possiede un grande campo angolare ottimo. Questa soluzione è quella dello strumento del tipo SCHMIDT, esso però richiede l'introduzione di una sottile lastra di vetro con una faccia asferica e l'altra sferica. Questa lastra per la sua posizione, per la piccola curvatura e spessore non introduce cromatismo, assorbe unicamente un poco della radiazione ultravioletta. La difficoltà di

costruzione di questa lamina rende il costo dello strumento notevolmente superiore a quello di uno strumento composto unicamente di due specchi.

La soluzione classica dell'ottica in questo caso è quella che richiede uno specchio principale concavo di sezione parabolica accoppiato ad uno specchio secondario convesso di sezione iperbolica (una calotta di un iperboloide a due falde). Il fuoco del paraboloide coincide con il fuoco dell'iperboloide della calotta ad esso relativa. L'immagine stigmatica di una sorgente all'infinito sull'asse ottico dello strumento viene a formarsi nell'altro fuoco dell'iperboloide.

Tale soluzione ha però il difetto di richiedere la realizzazione di due superficie asferiche che sono, specie la prima, difficili a farsi. È stato perciò proposto di fare questa prima superficie sferica e dare a quella secondaria quella forma opportuna per correggere le aberrazioni residue in modo che l'immagine finale risulti corretta quanto basti. Si vuole in questa nota esaminare questo problema, stabilire cioè la forma dello specchio secondario nel caso della sorgente puntiforme all'infinito sull'asse.

In prima approssimazione possiamo pensare entrambi gli specchi sferici. Assumiamo come unità di lunghezza il raggio di curvatura del primo specchio, cioè quello concavo principale. L'immagine della sorgente data da questo specchio viene a formarsi ad una distanza $\frac{1}{2}$ dal suo vertice. Sia Δ la distanza del vertice del secondo specchio dal vertice del primo, sarà questa distanza essenzialmente positiva, se si desidera che esista la soluzione fisica del problema. Se con r e q indichiamo rispettivamente il raggio del secondo specchio e la distanza dell'immagine finale dal vertice di questo, potremo scrivere

$$(1) \quad \frac{1}{2q} + \frac{1}{2\Delta - 1} = \frac{1}{r}$$

Stabiliamo ora la deformazione da apportarsi a questo specchio affinché si abbia un'immagine puntiforme. Il calcolo deve essere svolto in modo approssimato, salvo poi, a soluzione trovata, eseguire quei ritocchi empirici richiesti dall'applicazione rigorosa delle leggi sulla riflessione. Dato che la soluzione sferica soddisfa per piccole aperture, come ben si sa dall'ottica elementare, si deve concludere che nel vertice del secondo specchio superficie sferica ed asferica hanno la stessa curvatura. Se indichiamo con ds lo scostamento tra le due superficie per uno stesso valore dell'ordinata (nella sezione principale), tale quantità sarà dipendente dalla quarta potenza della quota, trascurando le potenze superiori e potremo scrivere

$$ds = \gamma y^4$$

dove γ è così un indice della asfericità della superficie.

Stabiliamo ora la forma dell'onda allorchè lascia il secondo specchio. Chiameremo aberrazione d'onda w lo scostamento tra l'onda reale e la sfera ad essa osculatrice sull'asse ottico. A meno di infinitesimi di ordine superiore, l'aberrazione d'onda sarà data da

$$w = c y^4$$

dove c sarà il coefficiente dell'aberrazione. Entro i limiti di questa approssimazione, le aberrazioni introdotte delle varie superficie ottiche si possono addizionare. Il coefficiente di aberrazione nel caso di una sorgente distante di x da uno specchio sferico di raggio r , è data da ¹⁾

$$c = \frac{(x-r)^2}{4r^3 x^2} \left(\frac{y_0}{y} \right)^4$$

dove y_0 è la quota di incidenza di un elemento dell'onda sullo specchio su cui avviene la riflessione ed y è quella corrispondente allo stesso elemento dell'onda nel piano dove conviene stabilire l'aberrazione.

Se la sorgente è all'infinito e se si desidera conoscere il valore di c allorchè l'onda riflessa dal primo specchio tocca il secondo specchio, si trova facilmente

$$c_1 = \frac{1}{4(1-2\Delta)^4}.$$

Similmente se la sorgente si trova ad una distanza q dal secondo specchio di raggio r e si desidera trovare l'aberrazione d'onda nel momento in essa lascia questo specchio, sarà $y_0 = y$ e si scriverà

$$c_2 = \frac{(q-r)^2}{4q^2 r^3}.$$

L'aberrazione complessiva dell'onda dopo la riflessione sui due specchi supposti sferici sarà data, per quanto si è detto, da :

$$dw = (c_1 + c_2) y^4.$$

Questa aberrazione deve venire bilanciata da una asfericità della superficie del secondo specchio. Dato però che uno scostamento ds della superficie allunga il cammino ottico del doppio, dovremo avere

$$2 ds = dw$$

¹⁾ v. per es. « Ottica » — Anno VII, n. 2, 1942.

ossia

$$(2) \quad \gamma = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(1-2\Delta)^4} + \frac{(q-r)^2}{q^2 r^2} \right\}.$$

La forma della superficie sarà quella della sfera alla quale sarà sovrapposto lo scostamento ds . Se noi assumiamo ora un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'asse delle ascisse sia orientato secondo l'asse ottico, sarà $ds = dx$, e l'equazione di una sfera con il centro di coordinate $r, 0$, sviluppata secondo le potenze di y è data da

$$x = \frac{1}{2r} y^2 + \frac{1}{8r^3} y^4$$

e l'equazione della sezione meridiana della superficie asterica sarà quindi

$$(3) \quad x = \frac{1}{2r} y^2 + \left(\frac{1}{8r^3} + \gamma \right) y^4.$$

La soluzione migliore sarebbe quella nella quale anche il secondo specchio fosse sferico, si avesse cioè $\gamma = 0$. Eliminando tra la (1) e la (2) la espressione $(1-2\Delta)$, posto $\delta = 1/d$, $\rho = -1/r$, ed uguagliando a zero la (2) si ha l'equazione

$$\left(\rho + \frac{\delta}{2} \right)^4 - \rho(\rho + \delta)^2 = 0.$$

Questa equazione ha soluzioni reali evidentemente soltanto per ρ maggiore di zero, cioè per specchi secondari convessi, secondo le convenzioni implicite nella (1). Le soluzioni fisicamente significative devono portare a valori di Δ maggiori di zero e le immagini reali devono inoltre avere anche δ maggiore di zero. Queste condizioni sono soddisfatte solamente per valori di Δ molto piccoli. In tali casi lo specchio secondario schermo quello principale per modo che anche queste soluzioni sono praticamente impossibili.

Si deve quindi pensare a realizzare una superficie asferica. Una serie di soluzioni deve essere particolarmente considerata: quella nella quale l'immagine viene a formarsi lievemente esterna allo specchio principale dopo la riflessione dallo specchio secondario. Lo specchio principale in tal caso è forato e chiameremo estrazione ϵ dell'immagine la distanza tra il vertice dello specchio principale e l'immagine, sarà perciò

$$q = \Delta + \epsilon$$

con ϵ sempre positiva.

Si trova facilmente eliminando r

$$(4) \quad 8\gamma = \left(\frac{1}{2\Delta-1}\right)^4 + \left(\frac{1}{2\Delta-1} - \frac{1}{2q}\right)^2 \left(\frac{1}{2\Delta-1} + \frac{1}{2q}\right)$$

e se trascuriamo l'estrazione ϵ e poniamo perciò $q = \Delta$, sarà

$$8\gamma = \left(\frac{1}{2\Delta-1}\right)^4 + \left(\frac{1}{2\Delta-1} - \frac{1}{2\Delta}\right)^2 \left(\frac{1}{2\Delta-1} + \frac{1}{2\Delta}\right)$$

Il secondo membro di questa equazione è sempre positivo per valori di Δ compresi tra zero e $+1$. Il suo valore passa da un valore infinitamente grande per $\Delta = 0$ ad un valore minimo di $+16$ per $\Delta = 0.25$ per ritornare ad un valore infinito per $\Delta = 0.5$; torna poi a decrescere per valori di Δ maggiori.

In una applicazione numerica si è preferito assumere un valore di Δ maggiore di 0.25 (che corrisponde alla introduzione di uno specchio secondario a curvatura nulla sull'asse) per ridurre le dimensioni dello specchio secondario, che schermo sempre una parte del flusso incidente, ed allungare contemporaneamente la focale del sistema. Si è scelto il caso nel quale il raggio dello specchio secondario è uguale a quello del principale cambiato di segno e cioè pari a -1 . In questo modo si elimina la curvatura di campo immagine e, nel caso che in successione di tempo si voglia realizzare un telescopio del tipo SCHMIDT, il primo specchio può essere utilizzato così come si trova e basta un piccolo ritocco nella forma del secondo per renderlo adatto al nuovo compito.

Con queste condizioni, e in più imponendo una piccola estrazione della immagine, si è trovato $\Delta = 0.2907$, $\epsilon = 0.0688$ e la focale del sistema risulta $f = 1/4 \Delta = 0.8601$. Così se si vuole che la focale dello strumento sia di 250 cm. ne deriva una distanza tra i due specchi di $\Delta = 84.5$ cm. ed un raggio di curvatura pari a 290.7 cm.

Dalla formula (4) si trova allora $\gamma = 2.2833$ e con la (3) si trova l'equazione della superficie che risulta data da

$$x = 0.5 y^2 + 2.4083 y^4.$$

Si può verificare facilmente che, sempre nella approssimazione del 4° ordine, questa rappresenta un'ellisse con il semiasse relativo all'asse delle x pari a 0.05190 e l'altro pari a 0.2278. Lo specchio secondario avrà quindi la figura di un ellissoide di rivoluzione attorno all'asse minore.

Naturalmente una teoria di questo tipo non può essere che di primo orientamento, appunto perchè approssimata. Bisogna verificare se una tale superficie permette di ottenere un'immagine stigmatica per una sorgente

all'infinito sull'asse. Se l'immagine non è tale, si ritoccano opportunamente i dati fino a raggiungere il risultato desiderato. Il calcolo delle traiettorie dei raggi luminosi che si riflettono su date superficie è un problema elementare di geometria analitica. Le conclusioni dei calcoli numerici, un poco laboriosi, ma privi di particolare interesse, portano alla seguente espressione della sezione meridiana dello specchio asferico:

$$x = 0.5 y^2 + 2.4075 y^4 + 10.62 y^6.$$

Questa equazione permette di costruire un sistema ottico con aperture relative fino ad $1/2$ e focali di 250 cm. capace di produrre un'immagine sull'asse di diametro entro un paio di micron.

Naturalmente l'espressione qui data non rappresenta nell'approssimazione del 6° grado un ellissoide perchè il coefficiente del terzo termine, pur essendo del giusto segno, è tre volte inferiore a quello che si deriva sviluppando in serie l'espressione della sezione meridiana di un ellissoide.

Un confronto tra questo tipo di strumento e gli altri tipi si può fare, da un punto di vista ottico, esaminando il rendimento fuori dell'asse. Un calcolo esatto fatto per una sorgente di 1° fuori dell'asse porta nel caso di uno strumento di 250 cm. di focale e 50 cm. di apertura a valori del diametro dell'immagine di 1,34 mm. Questo valore è ben 4 volte maggiore di quello che si ottiene in un sistema classico (primo specchio parabolico e secondo iperbolico) delle stesse caratteristiche gaussiane.

Napoli — Capodimonte. 28 ottobre 1951.

SUL FEGATO GRASSO FISILOGICO

Memoria del socio ord. Vincenzo Diamare e del dott. Antonio de Girolamo

presentata nell'adunanza del dì 3 marzo 1951

per essere inserita nel volume III della 3ª serie degli Atti

Sunto. — Ricerche sul grasso, sul pigmento del fegato normale dei selaci, in confronto con casi di fegati piccoli oligolipidici e fortemente pigmentati in *Scylliorhinus*, in confronto altresì della degenerazione grassa e pigmentaria in patologia. — Sui metodi istologici per riconoscere lipoidi e corpi mielini e la lipoidosi.

ANCORA LE RONDINI IN SHAKESPEARE

Nota del Socio Giuseppe De Lorenzo

(Adunanza del dì 3 novembre 1951)

Sunto. — Questa Nota è una semplice aggiunta chiarificatrice alla Nota sulle *Rondini in Shakespeare*, presentata all'Accademia nel giugno 1951.

Nella mia Nota *Le Rondini in Shakespeare*, presentata all'Accademia nel giugno 1951 e pubblicata nel Rendiconto dell'anno in corso, cercai di dimostrare, che il *martlet*, descritto da SHAKESPEARE nel *Macbeth* (1, 6) ed in *The Merchant of Venice*, (II, 9), non è, come comunemente si traduce e s'interpreta, il rondone, *Cypselus apus*, e nemmeno la rondine comune o campagnola, *Hirundo rustica*; ma è, invece, la rondine casalinga o cittadina, *Hirundo urbica*: che in Italia si chiama rondicchio o balestruccio. Nella foga dello scrivere, però, mi sfuggì dalla memoria una prova importantissima per la mia dimostrazione, data da quel geniale poeta e conoscitore di unissimo e profondo della vita vegetale ed animale, che fu Giovanni PASCOLI. Il PASCOLI, infatti, nella prefazione, del giugno 1897, ai suoi *Primi Poemetti*, aveva dato una descrizione, scientificamente esattissima e linguisticamente bellissima, delle due specie di rondine e del rondone, che io qui riporto: non solo a conforto della mia tesi, ma anche, e più ancora, per fissare maggiormente un modello mirabile di descrizione, ad un tempo, poetica e scientifica.

« E quei balestrucci che strisciano intorno per l'aria coi loro scoppiettii rapidi e sonori, non li abbiamo sempre avuti nella nostra casa? C'erano anzi, negli anni passati, anche le rondini, quelle che hanno il pettino rugginoso, non bianco, e la lunga coda biforcuta, e il canto più soave e più parlato [*Hirundo rustica*]; ma ebbero che dire con queste rissose sorelle del pettino bianco [*Hirundo urbica*]; e se ne sono audate... O rondinelle dal petto rosso, o rondinelle dal petto bianco, se poteste andare d'accordo! Le une e le altre io vorrei torno torno sotto le mie grondaie, e vorrei avere tutto il dì, mentre sto curvo sui libri, negli occhi intenti ad altro, la vertigine d'ombra del vostro volo! Mi fate tanto buona compagnia già voi, bianche. Io non so che cosa succede stamane. Ho sorpreso una viva conversazione familiare dentro un nido. C'erano pigolii e strilli. Qualcuno alzava la voce. E ne siete uscite in tre o quattro. Che si è deliberato nella capannetta sospesa, che forse è la residenza del capo-tribù? forse l'impianto di nuove case? Fate pure. E buona caccia! Le mosche ab-

bondano quest'anno come sempre. A proposito: si chiede a che servono le mosche. Chiaro, che a nutrir le rondini. E le rondini? Chiaro, che a insegnare agli uomini (perciò si mettono sopra le loro finestre) tante cose: l'amore della famiglia e del nidiotto. La prima capanna che uomo costruì, di terra seccata al sole, alla sua donna, gli insegnò una coppia di rondini a costruirla. Ciò fu al tempo dei nomadi. Le rondini viaggiatrici insegnarono all'uomo di fermarsi. E gli dettero il modellino della casa. Solo, l'uomo lo capovolse... Appunto oggi è arrivata gente di fuori, di lontano. I rondoni [*Cypselus apus*]. Strillano in gruppi di quattro o cinque: in corse disperate, come pazzi. Fanno il nido nei buchi lasciati dalle travi. Ecco che io ho intorno casa anche i rondoni, popolo bellicoso e straniero, vestito di nero opaco. Ahimè, con le rondini non andranno d'accordo! saranno risse e guerre... »

Ecco come questa descrizione del PASCOLI, oltre a fornire una efficace sostegno della mia tesi, illustra in modo magistrale la figura, la voce, la vita e la casa del *martlet*, o balestruccio, descritto da SHAKESPEARE.

CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO PER GLI ANNI 1951-1952

L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1951-1952.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all'autore della migliore memoria sul tema: « *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 31 ottobre 1952.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell'autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell'autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto lo *accessit* saranno aperte nell'adunanza plenaria del gennaio 1953 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell'archivio dell'Accademia banditrice.

Napoli, 3 marzo 1951.

Il Presidente
FRANCESCO GIORDANI

UN METODO DI ITERAZIONE PER LA TRAVE SU MEZZO ELASTICO

Nota dell'ing. Aldo Raithel, presentata dal socio corrisp. A. Galli

(Adunanza del dì 3 novembre 1951)

Sunto. — Riassunti brevemente gli ordinari metodi di calcolo della trave su mezzo elastico si espone un procedimento di successive approssimazioni e si riporta un esempio concreto.

Metodi usuali di calcolo.

Dalla teoria delle travi inflesse l'equazione della linea elastica si può scrivere direttamente nella forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x) - Cby \quad (1)$$

dove a secondo membro il carico è dato dalla differenza tra il carico applicato $q(x)$ e la reazione del terreno Cby avendo indicato con b la larghezza della base di appoggio della trave e con C la costante di elasticità del terreno (forza per unità di superficie che provoca l'abbassamento $y = 1$).

Facendo riferimento ad una trave a sezione costante per cui si ponga:

$$L^4 = \frac{4EI}{bC} \quad (2)$$

la (1), osservando che nelle pratiche applicazioni si fa riferimento solo a forze concentrate per cui $q(x) = 0$, diventa:

$$L \frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0 \quad (3)$$

la cui soluzione, operando la sostituzione di variabile $\xi = \frac{x}{L}$, è data da:

$$y = e^{\xi} (A \cos \xi + B \sin \xi) + e^{-\xi} (C \cos \xi + D \sin \xi). \quad (4)$$

Evidentemente la (4) è valida per ogni tronco di trave compreso tra due forze esterne (o momenti) o tra una forza (momento) ed un estremo libero e quindi la soluzione del problema richiede la determinazione di $4n$ costanti se con n si indica il numero dei tronchi.

Data la laboriosità della soluzione del sistema delle $4n$ equazioni nelle $4n$ costanti incognite cui si perviene la soluzione effettiva del problema si

persegue usualmente mediante sovrapposizione degli effetti, con l'artificio della trave di lunghezza infinita, o, come recentemente suggerito dal prof. MAZZARELLA, con l'esprimere $4n - 2$ costanti in funzione delle due rimanenti e determinando quindi queste ultime.

Esposizione del procedimento.

Date le notevoli difficoltà applicative dei metodi usuali innanzi riassunti si espone in quanto segue un procedimento del tutto generale che permette di giungere alla soluzione attraverso successive approssimazioni e si tabellano tutte le caratteristiche necessarie alle pratiche applicazioni.

Detto procedimento si basa su una generalizzazione del metodo di CROSS e conduce alla soluzione effettiva tramite successivi equilibramenti a rotazione ed a traslazione dei nodi (punti di concorso di due tronchi).

Si considerano inizialmente tutti i nodi impediti sia di ruotare che di traslare mediante l'introduzione di vincoli supplementari, che si pensano realizzati rispettivamente con corsoi ed appoggi, le cui reazioni equilibrano direttamente le forze esterne; in questa fase preliminare i vari tronchi non risultano sollecitati.

Si consideri inizialmente il nodo generico i^{mo} e si sopprima l'appoggio corrispondente; sotto l'azione della forza esterna F_i il nodo trasla (la rotazione è ancora impedita dal corsoio) fino a quando le reazioni elastiche, derivanti dalla flessione dei due tronchi adiacenti al nodo, ristabiliscono l'equilibrio. A questo punto all'estremità di ciascuno dei due tronchi concorrenti nel nodo in esame agiscono momenti e tagli, indotti dalla traslazione relativa dei due estremi, tali da garantire la congruenza della deformazione, rispetto dei vincoli esistenti, e l'equilibrio del nodo. Eseguita questa prima operazione si toglie di nuovo al nodo la possibilità di traslare riapplicandovi l'appoggio e si sopprime il corsoio; il nodo ruoterà allora sotto l'azione dei momenti su esso agenti, momento esterno e momenti derivanti dalla prima operazione, fino a raggiungere una configurazione di equilibrio compatibile con i vincoli applicati ai due tronchi. In questa fase si inducono agli esiremi dei due tronchi nuovi tagli e momenti che si sovrappongono a quelli precedenti dando luogo in generale ad una reazione dell'appoggio e quindi alla necessità di operare su questa come inizialmente sulla forza esterna F_i . Si procede così di seguito fino a pervenire a valori trascurabili delle reazioni dei vincoli supplementari e quindi ad una configurazione di equilibrio per valori nulli di tali reazioni.

Lo stesso procedimento si segue in tutti i nodi della trave; tenuto conto che l'equilibramento di un nodo porta allo squilibrio, per effetto dei tagli e dei momenti indotti, dei nodi adiacenti nella pratica applicativa, al fine di ottenere una maggiore convergenza del procedimento, conviene eseguire i successivi equilibramenti con riferimento ai nodi più squilibrati

eseguendo nell'ordine l'equilibramento dei nodi per i quali risulta maggiore la reazione dell'appoggio o del corsoio.

Giunti al voluto grado di approssimazione (momenti e tagli indotti trascurabili) i valori finali dei tagli e dei momenti agli estremi di ogni tronco si hanno sommando tutti i tagli e momenti di equilibramento e di induzione precedentemente determinati.

L'equilibramento di un nodo a traslazione (o rotazione) richiede la conoscenza delle rigidità a traslazione (o rotazione) delle aste formanti il nodo per poter ripartire in parti ad esse proporzionali la forza squilibrata (il momento squilibrato) che sollecita il nodo stesso; per definire poi completamente lo stato di sollecitazione generato nel tronco dell'aliquota di forza (o momento) da esso assorbito occorre conoscere i momenti ed i tagli che quella forza (o momento) genera agli estremi del tronco in esame.

Determinazione delle rigidità e dei fattori di induzione.

Esaminiamo dapprima il caso del tronco di estremità e definiamo (v. fig. 1) rigidità a traslazione in A la forza W_t da applicarsi in A per ottenere:

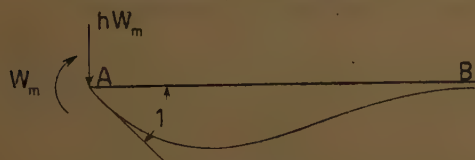
$$y_a = 1 \quad y'_a = 0$$

ovviamente è necessario applicare contemporaneamente in A anche un momento kW_t , momento indotto, definendo k fattore di induzione di momento.



Fig. 1.

Analogamente si definisce (v. fig. 2) rigidità a flessione in A il momento W_m che agendo in A vi provoca



$$y_a = 0 \quad y'_a = 1$$

Fig. 2.

in questo caso occorre fare agire in A una forza hW_m , taglio indotto, essendo h il fattore di induzione di taglio.

Nei caso di tronco intermedio (v. fig. 3) valgono le stesse definizioni del caso precedente notando però che è necessario introdurre tre fattori di induzione e precisamente per la rigidità a taglio diremo:

k_1 = fattore di induzione di momento in A.

k_2 = fattore di induzione di taglio in B.



Fig. 3.

k_s = fattore di induzione di momento in B .

E per quella a flessione (v. fig. 4):



Fig. 4.

h_1 = fattore di induzione di taglio in A .

h_2 = fattore di induzione di momento in B .

h_3 = fattore di induzione di taglio in B .

Per rendere il procedimento di immediata applicazione i valori delle rigidezze e dei fattori di induzione sono stati determinati mediante la (4) per ogni condizione di carico e di vincolo contemplata nei casi precedenti pervenendo alle espressioni seguenti

a) Tronco di estremità.

$$k = Lk'$$

$$W_i = \frac{1}{2} CL W_i'$$

$$h = \frac{1}{L} h'$$

$$W_m = \frac{1}{2} CL^3 W_m'$$

b) Tronco intermedio.

$$k_1 = \frac{L}{2} k_1'; k_2 = 2k_2'; k_3 = 2Lk_3'; W_i = CL W_i'$$

$$h_1 = \frac{1}{L} h_1'; h_2 = h_2'; h_3 = \frac{1}{L} h_3'; W_m = \frac{1}{2} CL^3 W_m'$$

nelle quali i valori dei fattori adimensionali, indicati con apici, sono stati tabellati per vari rapporti tra la lunghezza effettiva del tronco, l , e la sua lunghezza caratteristica L .

La tabellazione è stata eseguita per $\alpha = l/L$ compresa tra 0,2 e 3,2; per valori maggiori di α possono senz'altro adottarsi i risultati relativi ad $\alpha = \infty$.

Sulla convenzione dei segni.

Si adotta per i momenti la convenzione usuale del metodo di Cross momenti positivi se orari, intendendo i momenti come azione del nodo sull'asta; i tagli si assumono positivi quando l'azione del nodo sull'asta è diretta verso l'alto.

Si noti che in base a queste convenzioni sono stati determinati i segni dei fattori di induzione nelle tabelle riportate in seguito.

Il tracciamento delle linee M e T .

Noti i momenti ed i tagli agli estremi di ciascun tronco è possibile determinare le costanti della (4) e completare quindi la ricerca delle caratteristiche di sollecitazione in ogni sezione.

Per rendere più spedita questa determinazione si riporta, con riferimento alle linee M e T , il caso concreto del tronco di estremità (la convenzione dei segni è ora quella usuale).

Per esso (v. fig. 5) posto:

$$A = 4M_a l - 2LT_a m$$

$$B = 2(M_a n + LT_a l)$$

si ha nella sezione generica:

$$M = Af_1 - Bf_2 \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{L} (Af_3 - 2Bf_4). \quad (5')$$

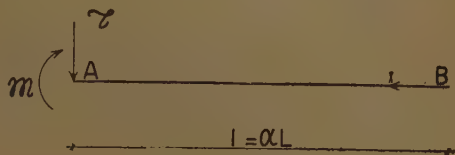


Fig. 5.

Le costanti l , m , n , e le funzioni f_1 , f_2 , f_3 , sono tabellate in funzione rispettivamente del rapporto $\alpha = l/L$ e del valore dell'ascissa corrente $\xi = x/L$ (v. tabelle « c » e « d »).

Nel caso di tronco intermedio ci si può ancora avvalere delle formule (5) e (5') calcolando separatamente l'effetto dei tagli e dei momenti agenti ai due estremi e sovrapponendo gli effetti.

Tabelle.

Nell'uso delle tabelle si noti quanto segue:

TABELLA « a »: Rigidezze e fattori di induzione per il tronco di estremità.

La determinazione dei fattori di induzione è stata eseguita nell'estremo A (sinistro) del tronco e quindi i valori tabellati sono relativi a questo estremo; ove si operi nell'estremo B (destro) occorre di cambiare i segni di h' e k' .

TABELLA « b »: Rigidezze e fattori di induzione per il tronco intermedio.

Analogamente a quanto sopra operando nell'estremo B (destro) del tronco bisogna cambiare i segni di h_1' , e h_3' , h_1' , e h_3' .

Esempio numerico.

Con riferimento allo schema di fig. 6 si procede alla determinazione dei momenti e dei tagli nei nodi B e C ed al tracciamento delle linee M e T .

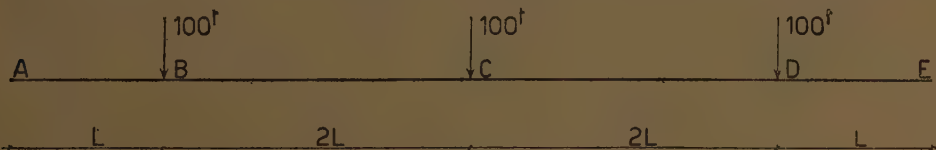


Fig. 6.

Data la simmetria si fa riferimento a metà trave considerando quindi in C un incastro scorrevole (il che equivale ad equilibrare il nodo C solo a traslazione).

La lunghezza caratteristica della trave sia $L = 4,00$ m. costante per tutti i tronchi.

Operazioni preliminari: calcolo delle rigidezze e dei fattori di induzione.

Tronco A — B.

$$W_t = 0,5 \quad 1,7419 \quad CL = 0,87095 \quad CL \quad k = 0,4606 \quad 4 = 1,84240 \quad m.$$

$$W_m = 0,5 \quad 0,5081 \quad CL^3 = 0,25405 \quad CL^3 \quad h = \frac{1,5374}{4} = 0,38435 \quad m.^{-1}$$

Tronco B — C.

$$W_t = 1,0762 \quad CL \quad k_1 = -0,5 \quad 4 \quad 1,0538 = -2,1075 \quad m.$$

$$W_m = 0,5 \quad 1,1373 \quad CL^3 = 0,56865 \quad CL^3 \quad k_2 = -0,0720 \quad 2 = -0,1440$$

$$k_3 = -2 \quad 4 \quad 0,1243 = -0,9944 \quad m.$$

$$h_1 = -\frac{0,9969}{4} = -0,2492 \quad m.^{-1}$$

$$h_2 = \quad \quad \quad = 0,5316$$

$$h_3 = \frac{0,4703}{4} = 0,1175 \quad m.^{-1}$$

Equilibramento a taglio in B ; schema dei coefficienti di ripartizione e dei fattori di induzione:

(B)				(C)	
M	T	T	M	M	T
1,8424	0,4473	0,5527	-2,1076	-0,9944	-0,1440

Equilibramento a flessione in B ; schema dei coefficienti di ripartizione e dei fattori di induzione:

(B)				(C)	
M	T	T	M	M	T
0,3088	0,3843	-0,2492	0,6912	0,3516	0,1175

Per il nodo C , data la simmetria, occorre eseguire il solo equilibramento a taglio per cui si ha (v.; la convenzione sui segni delle tabelle) il seguente schema:

(B)		(C)	
T	M	M	T
-0,1440	0,9944	2,1076	0,5000

Si iniziano ora i successivi equilibramenti a taglio (contrassegnati con lettera minuscola) ed a flessione (contrassegnati con lettera maiuscola) operando come segue:

I — Equilibramento a taglio del nodo *B*.

$$\begin{aligned}
 T_{ba} &= -100\cdot000 \quad 0,4473 = -44730 \text{ Kg.} \\
 T_{ba} &= -100\cdot000 \quad 0,5527 = -55270 \text{ Kg.} \\
 T_{ba} &= -44730 \quad 1,8424 = -62410 \text{ Kgm.} \\
 T_{ba} &= -55270 (-2,1076) = 116487 \text{ Kgm.} \\
 T_{cb} &= -55270 (-0,9944) = 54960 \text{ Kgm.} \\
 T_{cb} &= -55270 (-0,1440) = 7959 \text{ Kg.}
 \end{aligned}$$

II — Equilibramento a taglio del nodo *C*.

E così di seguito come nello schema seguente dove nell'ultima riga sono riportati i valori finali (somma) dei tagli e dei momenti di estremità.

(B)			(C)		
M	T	T	M	M	T
- 62410	- 44730	- 55270	+ 116487	+ 54960	+ 7959
	<u> </u> ^a	<u> </u> ^a			
- 6877	- 3733	+ 8346	- 57634	- 122154	- 57959
	<u> </u> ^c				<u> </u> ^b
+ 6396	+ 2458	- 4613	+ 9722	+ 4587	+ 664
<u> </u> ^A		<u> </u> ^c			
+ 636	+ 345	- 358	+ 14316	+ 5033	+ 1683
	<u> </u> ^e		<u> </u> ^A		
+ 802	+ 308	+ 338	- 2334	- 4946	- 2347
<u> </u> ^B					<u> </u> ^d
		+ 427	- 900	- 425	- 61
		<u> </u> ^e			
			+ 1796	+ 631	+ 211
			<u> </u> ^B		
- 81453	- 45660	- 55340	+ 81453	- 62614	- 50000

Noti i momenti ed i tagli di estremità si è eseguito, v. fig. 7, il tracciamento delle linee *M* e *T*.

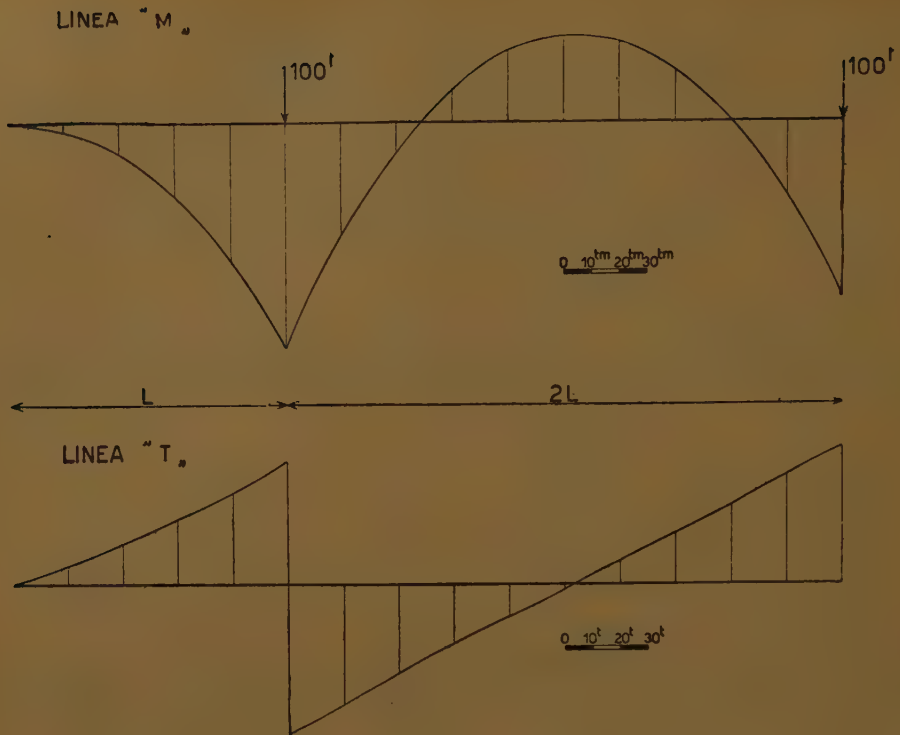


Fig. 7.

TABELLA «A»

$1/L$	k'	W_i'	h'	W_m'	$1/L$
0.2	— 0.0999	0.3845	— 7.5472	0.0050	0.2
0.4	— 0.1995	0.7953	— 3.7517	0.0424	0.4
0.6	— 0.2966	1.1689	— 2.5074	0.1382	0.6
0.8	— 0.3861	1.5085	— 1.9020	0.3114	0.8
1.0	— 0.4606	1.7419	— 1.5374	0.5081	1.0
1.2	— 0.5124	1.8140	— 1.3169	0.7100	1.2
1.4	— 0.5391	1.8312	— 1.1703	0.8439	1.4
1.6	— 0.5450	1.8342	— 1.0797	0.9259	1.6
1.8	— 0.5383	1.8380	— 1.0257	0.9645	1.8
2.0	— 0.5269	1.8519	— 0.9970	0.9787	2.0
2.2	— 0.5159	1.8744	— 0.9948	0.9905	2.2
2.4	— 0.5076	1.9011	— 0.9825	0.9923	2.4
2.6	— 0.5023	1.9277	— 0.9853	0.9829	2.6
2.8	— 0.4995	1.9506	— 0.9897	0.9777	2.8
3.0	— 0.4983	1.9682	— 0.9939	0.9869	3.0
3.2	— 0.4982	1.9801	— 0.9968	0.9900	3.2
∞	— 0.5000	2.0000	— 1.0000	1.0000	∞

$$W_i = 0,5 \quad CL W_i'$$

$$h = k' L$$

$$W_m = 0,5 \quad CL^3 W_m'$$

$$h = \frac{1}{L} h'$$

T A B E L L A « b »

1/L	W'_t	k'_t	k'_s	W'_m	h'_1	h'_s	h'_3	1/L
0.2	363.7272	-0.1999	-0.4999	10.1900	-7.5970	0.5094	7.5970	0.2
0.4	47.0821	-0.3991	-0.4979	6.4200	-2.9133	0.4988	2.9092	0.4
0.6	14.1046	-0.5932	-0.4893	3.3377	-2.5070	0.4984	2.4892	0.6
0.8	6.1557	-0.7723	-0.4675	2.5280	-1.9941	0.4974	1.8537	0.8
1.0	3.3701	-0.9592	-0.4262	2.0181	-1.5376	0.4883	1.4555	1.0
1.2	2.1782	-1.0249	-0.3638	1.7011	-1.3155	0.4772	1.1772	1.2
1.4	1.6057	-1.0745	-0.2855	1.4791	-1.1702	0.4571	0.9553	1.4
1.6	1.3121	-1.0904	-0.2057	1.3431	-1.0900	0.4342	0.7795	1.6
1.8	1.1574	-1.0766	-0.1321	1.1999	-1.0255	0.3945	0.6117	1.8
2.0	1.0762	-1.0538	-0.0720	1.1373	-0.9969	0.3516	0.4703	2.0
2.2	1.0350	-1.0320	-0.0269	1.0915	-0.9827	0.3031	0.3461	2.2
2.4	1.0154	-1.0153	+0.0046	1.0548	-0.9825	0.2521	0.2392	2.4
2.6	1.0072	-1.0047	+0.0250	1.0262	-0.9873	0.2016	0.1508	2.6
2.8	1.0044	-0.9989	+0.0368	1.0130	-0.9896	0.1543	0.0807	2.8
3.0	1.0038	-0.9964	+0.0422	1.0065	-0.9938	0.1123	0.0281	3.0
3.2	1.0037	-0.9966	0.0430	1.0024	-1.0026	0.0765	0.0096	3.2
∞	1.0000	-1.0000	0.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	∞

$$W_t = CLW'_t; \quad k_1 = 0,5 \frac{L}{k'_1}; \quad k_2 = 2k'_2; \quad k_3 = 2Lk'_3;$$

$$W_m = 0,5 \frac{CL^3}{W'_m}; \quad h_1 = \frac{1}{L} h'_1; \quad h_2 = h'_2; \quad h_3 = \frac{1}{L} h'_3;$$

T A B E L L E « c » e « d »

$1/L$	l	m	n	x/L	f_1	f_2	f_3
0.2	18.1818	2.4545	181.8182	0.2	0.0400	0.0054	0.4000
0.4	4.6921	1.2493	23.4428	0.4	0.1600	0.0426	0.7994
0.6	2.0762	0.8313	6.9018	0.6	0.3594	0.1439	1.1947
0.8	1.1619	0.6214	2.8783	0.8	0.6371	0.3407	1.5781
1.0	0.7347	0.4930	1.4365	1.0	0.9889	0.6635	1.9335
1.2	0.4990	0.4045	0.7925	1.2	1.4069	1.1405	2.2346
1.4	0.3534	0.3382	0.4601	1.4	1.8765	1.7958	2.4432
1.6	0.2557	0.2849	0.2699	1.6	2.3746	2.6457	2.5070
1.8	0.1859	0.2397	0.1529	1.8	2.8651	3.6945	2.3576
2.0	0.1338	0.2000	0.0775	2.0	3.2969	4.9304	1.9115
2.2	0.0938	0.1644	0.0278	2.2	3.6035	6.3161	1.0701
2.4	0.0629	0.1327	-0.0047	2.4	3.6924	7.7845	-0.2770
2.6	0.0379	0.1013	-0.0247	2.6	3.4511	9.2261	-2.2473
2.8	0.0202	0.0771	-0.0364	2.8	2.7443	9.4830	-4.9537
3.0	0.0070	0.0559	-0.0419	3.0	1.4135	11.3383	-8.4972
3.2	0.0024	0.0381	-0.0429	3.2	0.7152	11.5076	-12.9426

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, agosto 1951.

SULLA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELLE ALGEBRE DOPPIE DOTATE DI MODULO
II^a PARTE: BICOMPLESSI

Nota del dott. Ulderico Bencivenga, presentata dal socio N. Spampinato

(Adunanza del dì 1. dicembre 1951)

Sunto. — Si estendono ai numeri bicomplessi le teorie svolte in una precedente Memoria sui numeri bireali (« Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo », — Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 3^a, vol. II, n. 7, 1942. — Vedere anche: *Geometria e trigonometria iperboliche e fondamenti di una geometria a metri variabili* (presso l'Aut. U. BENCIVENGA, viale di villa Massimo 24, Roma).

Capitolo I.

(1) Sia il numero bicomplesso $z_1 v_1 + z_2 v_2$, in cui $z_1 = s + is$, $z_2 = t + it_1$ e

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad v_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ci proponiamo di estendere ai numeri di questa specie le teorie svolte nella sopra citata memoria.

Cominceremo dall'estensione del concetto di modulo. Per i bireali abbiamo chiamato *modulo iperbolico* la radice quadrata del valore assoluto del determinante della matrice dei numeri stessi. Nel nostro caso questo determinante ha il valore $z_1 z_2$ e quindi il modulo del bicomplesso dato dovrebbe essere per analogia uguale a $\sqrt{z_1 z_2}$, ma non si può adottare senza altro questo valore per non contravvenire in certi casi al principio di permanenza per il quale, allorchè $s_1 = t_1 = 0$, $z_1 z_2$ deve dare il valore assoluto di st affinché si abbia il caso dei bireali. Una tale condizione si verifica adottando la formola

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 \cdot e^{[(\omega_1 + \omega_2) - k\pi]i}$$

avendo posto $z_1 = s + is = r_1 e^{\omega_1 i}$, $z_2 = t + it_1 = r_2 e^{\omega_2 i}$ e indicando con k il maggior numero di π contenuti nella somma $\omega_1 + \omega_2$. Posto $r_1 r_2 = r_0^2$ e $2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - k\pi$, se si indica con R il modulo del bicomplesso, si può infine scrivere $R = r_0 e^{\omega_0 i}$. Di qui si ricava subito che R ha il modulo circolare uguale alla media geometrica dei moduli circolari di z_1 e z_2 e l'argomento uguale

alla media aritmetica degli argomenti di questi diminuita del maggior numero di $\frac{\pi}{2}$ in essa contenuti.

(2) Scriviamo il bicomplesso sotto la forma $R\left(\frac{z_1}{R} \cdot v_1 + \frac{z_2}{R} \cdot v_2\right)$ e vediamo se analogamente a quanto facemmo per i bireali ¹⁾, si può porre $\frac{z_1}{R} = e^{\Omega + s_1 \pi i}$ e $\frac{z_2}{R} = e^{-\Omega - s_2 \pi i}$ dove $s_1 \equiv \binom{s+3}{2}$ $s_2 \equiv \binom{s+4}{2}$ ambedue secondo il mod. 2, essendo s un numero intero da determinare. Poichè

$$\frac{z_1}{R} = e^{\lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + i \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + k \frac{\pi}{2} \right)} \quad \frac{z_2}{R} = e^{-\lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} - i \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - k \frac{\pi}{2} \right)}$$

si dovrà avere:

$$\Omega + s_1 \pi i = \lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + i \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + k \frac{\pi}{2} \right) \quad \Omega + s_2 \pi i = \lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + i \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - k \frac{\pi}{2} \right).$$

Sottraendo membro a membro si ha $s_1 - s_2 = k$, donde, in funzione di s , $s = -(k+3) \bmod 2$. Tra gli infiniti valori di questa formola scegliamo $s = k+1$.

Sommando invece le stesse relazioni si ottiene $\Omega = \lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + i \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - (s_1 + s_2) \pi \right]$. Ma $s_1 + s_2 = (s+3)^2 \bmod 2$. Questa uguaglianza darà un numero pari o un numero dispari secondo che s sarà dispari o pari. Potremo quindi scrivere:

$$\Omega = \lg \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + i \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

dove ε è zero per s dispari e uguale a 1 per s pari. Si avrà dunque:

$$z_1 v_1 + z_2 v_2 = R [e^{\Omega + s_1 \pi i} \cdot v_1 + e^{-\Omega - s_2 \pi i} \cdot v_2]. \quad (3)$$

Diremo *polare* questa forma del bicomplesso nella quale R è il *modulo* dianzi definito; Ω , espresso dalla (2), si dirà *argomento* ed $s = k+1$ si chiamerà *indice*.

Il modulo e l'argomento si possono esprimere anche come segue:

$$R = r_0 (\cos \omega_0 + i \sin \omega_0) \quad e^{\Omega} = t_0 (\cos \alpha_0 + i \sin \alpha_0)$$

essendo

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2} \quad t_0 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - (s-1) \frac{\pi}{2} \quad \alpha_0 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

¹⁾ Memoria citata nel *Sunto*, Cap. II, § 1, nn. 5 e 6.

Di queste quantità possiamo dare un'altra interpretazione. Notiamo che un bicomplesso qualunque $z_1 v_1 + z_2 v_2$ può porsi sotto la forma

$$(r_1 v_1 + r_2 v_2) (e^{\omega_1 i} \cdot v_1 + e^{\omega_2 i} \cdot v_2) \quad (4)$$

cioè come prodotto di un numero bireale dipendente solo dai moduli circolari di z_1 e z_2 per un bicomplesso dipendente solo dagli argomenti di essi.

Chiameremo *fattore bireale* del bicomplesso il primo fattore e *base* il secondo. Vedremo in seguito come il primo ha una certa analogia col modulo di un numero immaginario.

Richiamandoci ai nn. 5 e 6 della Memoria di cui alla nota precedente a piè di pagina, è facile dedurre che le quantità r_0 e t_0 sono rispettivamente il modulo ip. e l'esponentiale dell'argomento del fattore bireale. Applicando invece opportunamente la formola $R=r_0 e^{\omega_0 i}$ e la formola (2) al bicomplesso base, si ha che il suo modulo è $e^{\omega_0 i}$ e l'argomento $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2}\right) i$ dove ε è zero per s dispari ed uno per s pari. Ne segue che ω_0 è la parte reale del logaritmo del modulo di questa base e α_0 la parte reale del suo argomento. Da quanto sopra si deduce anche che l'argomento di un bicomplesso può esprimersi con la formola $\Omega = \varphi + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2}\right) i$, cioè con la somma di un angolo ip. e di un angolo circolare immaginario. Infine, poichè $R = r_0 e^{\omega_0 i}$, si deduce ancora che *il modulo di un bicomplesso è dato dal prodotto del modulo ip. del fattore bireale per il modulo della base e l'argomento è dato dalla somma dell'argomento del fattore bireale e di quello della base.*

3. Siano due argomenti $\Omega'_{s'}$ e $\Omega''_{s''}$, rispettivamente di indici s' e s'' . Siano $s'_1 \equiv \binom{s'+3}{2}$, $s'_2 \equiv \binom{s'+4}{2}$, $s''_1 \equiv \binom{s''+3}{2}$, $s''_2 \equiv \binom{s''+4}{2}$, tutti secondo il mod. 2. Poniamo la condizione che per $\Omega'_{s'}$ e $\Omega''_{s''}$ sia soddisfatta la proprietà del prodotto di due esponenziali, cioè che sia

$$e^{\Omega' + s'_1 \pi i} \cdot e^{\Omega'' + s'_2 \pi i} = e^{\Omega + s_1 \pi i} \quad e^{\Omega' + s''_1 \pi i} \cdot e^{\Omega'' + s''_2 \pi i} = e^{\Omega + s_2 \pi i}$$

indicando con Ω la somma $\Omega' + \Omega''$. Dovrà aversi

$$\Omega' + \Omega'' + (s'_1 + s'_2) \pi i = \Omega + s_1 \pi i \quad \Omega' + \Omega'' + (s''_1 + s''_2) \pi i = \Omega + s_2 \pi i$$

da cui $s_1 = s'_1 + s'_2$, $s_2 = s''_1 + s''_2$. Consideriamo le somme dei secondi membri. Notiamo che essendo $\bar{s}_1 \equiv \binom{s+3}{2}$, $s_1 \equiv \binom{s+4}{2}$ secondo il mod. 2, indicando con s l'indice generico, si ha:

per	$s = 1$	s_1 pari	s_2 pari
»	$s = 2$	s_1 pari	s_2 dispari
»	$s = 3$	s_1 dispari	s_2 dispari
»	$s = 4$	s_1 dispari	s_2 pari

Questi risultati sono identici a quelli riportati a pag. 12 della Geometria citata nel Sunto e ad essa rimandiamo per la definizione di *risultante* di due indici. Come ivi vedemmo, essa si ottiene dalla matrice

4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4

fissando nella prima colonna e nell'ultima linea i due indici e trovando l'incrocio della colonna e della linea corrispondenti agli indici dati.

Un numero bicompleso posto sotto la forma polare assume dunque le espressioni $R(e^{\Omega v_1} + e^{-\Omega v_2})$; $R(e^{\Omega v_1} - e^{-\Omega v_2})$; $-R(e^{\Omega v_1} + e^{-\Omega v_2})$; $R(-e^{\Omega v_1} + e^{-\Omega v_2})$ secondo che l'indice di Ω sia 1, 2, 3, 4.

(4) Come facemmo per i bireali, introduciamo le unità u_1 e u_2 legate a v_1 e v_2 dalle relazioni $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 - v_2$. Chiamando $t_1 u_1 + t_2 u_2$ il bicompleso risultante dalla sostituzione, è facile ottenere la formola

$$R \left[\frac{e^{\Omega + s_1 \pi i} + e^{-\Omega - s_1 \pi i}}{2} \cdot u_1 + \frac{e^{\Omega + s_1 \pi i} - e^{-\Omega - s_1 \pi i}}{2} \cdot u_2 \right].$$

Ma i fattori di u_1 e u_2 sono le formole (2) riportate al n. 2 della citata Geometria ip., quindi

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 = R(\cosh \Omega_1 \cdot u_1 + \sinh \Omega_1 \cdot u_2).$$

È facile ottenere anche le formole seguenti:

$$R = \sqrt{(-1)^{s-1} (t_1^2 - t_2^2)} \quad \Omega_1 = \lg \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}} - \frac{\pi i}{2} \quad \cosh^s \Omega_1 - \sinh^s \Omega_1 = (-1)^{s-1}.$$

(5) Si sa che un elemento dell'algebra che si ottiene prolungando nel corpo complesso i numeri complessi $xu + yv$ può porsi sotto la forma $z_1 v_1' + z_2 v_2'$ in cui $v_1' = \frac{u - iv}{2}$, $v_2' = \frac{u + iv}{2}$ e che queste unità hanno la stessa tabella di moltiplicazione delle unità v_1 e v_2 dei numeri bireali. In tal modo il bicompleso $z_1 v_1' + z_2 v_2'$ assume la forma $w_1 u + w_2 v$ in cui $w_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$

$w_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i}$. È evidente che agli elementi dell'algebra $(v_1' v_2')$ potremo applicare le stesse considerazioni fatte per quelli dell'algebra $(v_1 v_2)$ e quindi adottare per essi la forma polare $R(e^{\Omega + s_1 \pi i} \cdot v_1' + e^{-\Omega - s_1 \pi i} \cdot v_2')$, nella quale esprimendo v_1' e v_2' mediante u e v , si ha

$$R \left[\frac{e^{\Omega + s_1 \pi i} + e^{-\Omega - s_1 \pi i}}{2} \cdot u + \frac{e^{\Omega + s_1 \pi i} - e^{-\Omega - s_1 \pi i}}{2i} \cdot v \right]$$

I coefficienti delle unità u e v hanno espressioni analoghe a quelle che danno il seno e il coseno circolari di un angolo immaginario $\Phi = \frac{\Omega}{i}$, ma di una forma più generale. Introducendo pertanto le funzioni definite da:

$$\cos \Phi_s = \frac{e^{(\Phi + s_1 \pi)i} + e^{-(\Phi + s_1 \pi)i}}{2}, \quad \sin \Phi_s = \frac{e^{(\Phi + s_1 \pi)i} - e^{-(\Phi + s_1 \pi)i}}{2i}$$

il bicomplesso potrà scriversi

$$w_1 u + w_2 v = R(\cos \Phi_s \cdot u + \sin \Phi_s \cdot v).$$

Quando $s=1$ queste formole danno le usuali funzioni circolari: quando $s \neq 1$ si hanno funzioni analoghe dipendenti dall'indice s , analogamente a quel che avviene per le funzioni ip. generalizzate (geom. citata).

È facile riscontrare le relazioni seguenti:

$$R = \sqrt{(-1)^{s-1}(w_1^2 + w_2^2)} \quad \Phi_s = \frac{1}{i} \lg \sqrt{\frac{w_1 + iw_2}{w_1 - iw_2}} - \epsilon \frac{\pi}{2} \quad \cos^2 \Phi_s + \sin^2 \Phi_s = (-1)^{s-1}$$

(6) Consideriamo ora il prodotto di due bicompleksi $z_1' v_1 + z_2' v_2$ e $z_1'' v_1 + z_2'' v_2$. Se $z_1 v_1 + z_2 v_2$ è il risultato, si ha $z_1 v_1 + z_2 v_2 = z_1' z_1'' v_1 + z_2' z_2'' v_2$, da cui $z_1 = z_1' z_1''$, $z_2 = z_2' z_2''$. Se R, R', R'' sono i moduli e $\Omega_s, \Omega_{s'}, \Omega_{s''}$ gli argomenti di indici s, s', s'' del prodotto e dei fattori rispettivamente, avremo:

$$R(e^{\Omega + s_1 \pi i} \cdot v_1 + e^{-\Omega - s_1 \pi i} \cdot v_2) = R' R'' [e^{(\Omega' + \Omega'') + (s_1' + s_1'') \pi i} \cdot v_1 + e^{-(\Omega' + \Omega'') - (s_1' + s_1'') \pi i} \cdot v_2]. \quad (5)$$

Per definizione è

$$R = \sqrt{(-1)^k z_1 z_2}, \quad R' = \sqrt{(-1)^{k'} z_1' z_2'}, \quad R'' = \sqrt{(-1)^{k''} z_1'' z_2''}$$

$$\text{da cui} \quad R' R'' = \sqrt{(-1)^{k' + k''} z_1' z_2' z_1'' z_2''}, \quad \frac{R}{R' R''} = \sqrt{(-1)^{k - (k' + k'')}}.$$

Ora $k - (k' + k'') = s - s' - s'' + 1$ ed s è la risultante di s' e s'' . Nella Geom. ip. citata (Parte I, § IV n. 9) vedemmo che fra due indici e la loro risultante

esiste una relazione lineare che nel nostro caso diviene $s+s'+s''=2h+1$ essendo h un numero intero. Quindi $s-s'-s''+1=2(s-h)$, cioè l'esponente di -1 nel rapporto $\frac{R}{R'R''}$, è pari e pertanto $R=R'R''$. In conseguenza, ricordando che $s_1'+s_1''=s_1$ e $s_2'+s_2''=s_2$, dalla (5) si ha $\Omega=\Omega'+\Omega''$. Dunque: *il modulo del prodotto di due bicomplexi è uguale al prodotto dei moduli dei fattori e il suo argomento è uguale alla somma degli argomenti dei fattori stessi presa con l'indice risultante dei loro indici.*

Capitolo II.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI BICOMPLESSI

(7) Come è noto, si usa fare la rappresentazione geometrica di un bicomplesso nell' S_4 reale. Qui vogliamo esporre una nostra rappresentazione nel piano analoga a quella dei numeri complessi e solo alla fine accenneremo all'altra, considerata però sotto una forma alquanto diversa da quella usuale.

Invece di rappresentare i numeri complessi $s+is_1$ e $t+it_1$ in due piani opposti del sistema di coordinate ortogonali nell' S_4 reale, assumiamo due piani sovrapposti, in ciascuno dei quali sia fissato un sistema di coordinate ortogonali con la stessa origine, ma uno dei quali sia girato di 90° rispetto all'altro. Siano OV_1 e OV_2 gli assi positivi di un sistema e OV_3 e OV_4 quelli, pure positivi, dell'altro. Sul primo, che diremo piano dell'unità v_1 , rappresentiamo il complesso z_1 di modulo r_1 e di argomento ω_1 , e sull'altro che diremo dell'unità v_2 , rappresentiamo il complesso z_2 di modulo r_2 e di argomento ω_2 . Converremo di rappresentare il bicomplesso mediante lo intero parallelogramma Oz_1Pz_2 , costruito sui vettori di z_1 e z_2 . Un parallelogramma qualunque con un vertice nell'origine rappresenterà quindi un bicomplesso, allo stesso modo che un vettore con l'estremo nell'origine rappresenta un numero complesso. Una semplice costruzione geometrica darà la somma ed il prodotto di due bicomplexi.

La rappresentazione esposta non cade in difetto per i bireali, poichè in tal caso il sistema si riduce ai soli assi ortogonali OV_1, OV_2 . Chiameremo P vertice del bicomplesso dato

(8) Quando nel bicomplesso $z_1v_1+z_2v_2$ avviene che z_1 o z_2 sia nullo, il vertice P coincide col punto rappresentativo di z_1 o di z_2 . Vedemmo nella Memoria citata nel Sunto (Cap. I n. 3) che questi sono rappresentati da punti di un tessuto circolare, dimodochè i bicomplexi dell'algebra (v_1v_2) potrebbero rappresentarsi mediante due tessuti circolari aventi lo stesso polo: uno posto sul piano dell'unità v_1 e l'altro sul piano dell'unità v_2 . Osserviamo subito che ciascuno di questi tessuti rappresenta i divisori dello

zero nell'algebra stessa poichè si annulla il determinante della matrice $z_1 z_2$. Quando z_1 e z_2 percorrono i fili di questi tessuti, il vertice P percorrerà una certa linea. Ma se non si pongono delle condizioni, questa linea non obbedirà ad una legge geometrica determinata e non potremo parlar di tessuti come nel caso delle algebre reali. Perchè ciò avvenga, procederemo come allora, distinguendo i bicomplessi di ugual modulo e quelli di uguale argomento. Cominceremo dai primi.

(9) Poichè $R = r_0(\cos \omega_0 + i \sin \omega_0)$ dove $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$ e $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - (s-1)\frac{\pi}{2}$, affinchè il modulo sia costante è necessario e sufficiente che sia $r_1 r_2 = r_0^2$ e $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0 + (s-1)\pi$ essendo r_0 e ω_0 quantità date a priori. Se si ricerca l'angolo θ che la bisettrice dell'angolo $z_1 O z_2$ forma con l'asse delle ascisse $O V_1$, si trova $\theta = \omega_0 + (2s-1)\frac{\pi}{4}$. Essendo ω_0 fissato a priori, se ne deduce che i vettori di z_1 e di z_2 sono simmetrici ad una retta fissa dipendente solo dall'indice dell'argomento del bicomplesso. Si hanno così 4 posizioni della bisettrice, fra loro ortogonali. Se quindi $O z_1 P z_2$ rappresenta un bicomplesso di un dato modulo e si considerano gli altri tre parallelogrammi che si ottengono prendendo i punti simmetrici di z_1 e z_2 rispetto ad O si ha che essi rappresentano bicomplessi dello stesso modulo e precisamente quelli corrispondenti agli altri 3 indici. Concludendo, i parallelogrammi rappresentativi dei bicomplessi dello stesso modulo hanno i vettori simmetrici a due rette fisse ortogonali e il prodotto delle loro lunghezze è costante. Dalle condizioni necessarie e sufficienti indicate risulta che se z_1 percorre un filo dell'*ordito* del tessuto circolare relativo, cioè un cerchio, questo avverrà anche per z_2 , mentre se z_1 percorre un filo della *trama* del suo tessuto, cioè un raggio vettore, lo stesso si verificherà per z_2 . Il vertice P percorrerà una certa curva in ciascuno dei due casi. Precisamente, riferendo questa curva alla bisettrice dell'angolo $z_1 O z_2$, e alla sua normale e chiamando x, y le coordinate di P , si ha:

1.° Quando z_1 e quindi z_2 percorrono dei cerchi, P percorre l'ellisse

$$\frac{x^2}{(r_1 \pm r_2)^2} + \frac{y^2}{(r_1 \mp r_2)^2} = 1$$

dove il segno superiore va preso quando s è pari e l'inferiore se dispari. Ovvero, poichè $r_1 r_2 = r_0^2$:

$$\frac{r_1^2}{(r_0^2 \pm r_1^2)^2} x^2 + \frac{r_1^2}{(r_0^2 \mp r_1^2)^2} y^2 = 1.$$

Calcolando la distanza del fuoco dall'origine si ha $2r_0$. Variando r_1 si hanno due fasci di ellissi confocali con gli assi focali ortogonali fra loro: uno di essi corrisponde a s pari e l'altro a s dispari.

2.° Quando z_1 e quindi z_2 percorrono dei raggi vettori, P percorre l'iperbole

$$\frac{x^2}{4r_1r_2 \cos^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} - \frac{y^2}{4r_1r_2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \pm 1$$

dove il segno $+$ corrisponde a s pari e il $-$ a s dispari. Ovvero, in funzione di ω_1 :

$$\frac{x^2}{4r_0^2 \cos^2 \left[\omega_0 - \omega_1 + (2s-1) \frac{\pi}{4} \right]} - \frac{y^2}{4r_0^2 \sin^2 \left[\omega_0 - \omega_1 + (2s-1) \frac{\pi}{4} \right]} = \pm 1.$$

Calcolando la distanza focale dall'origine si ha $\pm 2r_0$, cioè lo stesso valore trovato innanzi per il fuoco dell'ellissi. Variando ω_1 si hanno due fasci di iperboli confocali coniugate: uno corrispondente agli indici pari e l'altro a quelli dispari.

Quanto sopra può esser riferito in modo assai semplice alla forma (4) di un bicompleso. La condizione che z_1 e quindi z_2 percorrano dei cerchi si traduce nella costanza del *fattore bireale*, mentre quella che z_1 e quindi z_2 percorrano dei raggi vettori si traduce nella costanza della *base*.

I fasci di ellissi e di iperboli confocali testè esaminati determinano il sistema di coordinate curvilinee noto nella geometria analitica. Si sa che queste coordinate si tagliano ortogonalmente e pertanto esse formano, secondo quanto esposto nella mia Geom. ip. (Parte II, Cap. 2°, § II), un *tessuto* nel sistema metrico circolare che può essere assunto a rappresentare i bicomplessi di uguale modulo. Queste coordinate potranno distinguersi con le notazioni $r_1 = \text{cost.}$ $\omega_1 = \text{cost.}$, ovvero, chiamando f il fattore bireale e b la base, con $f = \text{cost.}$ $b = \text{cost.}$

Rileviamo subito l'importanza del fuoco F del sistema. Esso individua il *tessuto ellittico iperbolico* rappresentativo di tutti i bicomplessi di un certo modulo, il quale, a sua volta, è determinato dal fuoco stesso. Infatti da $OF = 2r_0$ e $\omega_1 = \theta - (2s-1) \frac{\pi}{4}$ si ricava r_0 e ω_0 e quindi il valore di R . Si noti che la distanza focale è il doppio del modulo ip. del fattore bireale.

L'indice s è determinato dalla posizione del vettore focale. Poichè ω deve essere positivo e minore di $\frac{\pi}{2}$ e il suo valore è dato da $\theta - (2s-1) \frac{\pi}{4}$, si ha la disuguaglianza $(2s+1) \frac{\pi}{4} > \theta > (2s-1) \frac{\pi}{4}$. Facendo quivi $s=1, 2, 3, 4$ e indicando con Om, On, Op, Oq le bisettrici degli angoli formati dagli assi (cominciando dal quadrante VOV_1 e girando a sinistra) si ha che se il vettore focale cade nel quadrante mOn , s sarà 1; se cade nel quadrante nOp sarà 2 e così via.

Se consideriamo F come rappresentativo di un numero complesso riferito a OV_1 , cioè di $2r_0(\cos \theta + i \sin \theta)$, e sostituiamo a θ il valore $\omega_0 + (2s-1) \frac{\pi}{4}$,

$$(2s-1) \frac{\pi}{4} i$$

si ha che esso equivale a $2e$. *R.* Dato pertanto il punto R rappresentativo del modulo del bicomplesso, per aver F basta condurre OF che formi con OR l'angolo $(2s-1) \frac{\pi}{4}$ e prendere $OF = 2r_0$. Si hanno così 4 vettori focali, due a due allineati, e 4 fuochi.

Concludendo, un bicomplesso può essere geometricamente rappresentato nel piano da due punti P ed F , dei quali il primo rappresenti il suo vertice e l'altro il tessuto ellittico-iperbolico di tutti i bicomplessi di modulo uguale a quello del bicomplesso considerato. Le coordinate curvilinee passanti per P daranno r , ed ω , da cui $r_2 = \frac{r_0^2}{r_1} = \frac{OF^2}{4r_1}$ e $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_1 + (s-1)\pi = 2\theta - \omega_1 - \frac{\pi}{2}$. Così saranno conosciuti tutti gli elementi per la costruzione del parallelogramma rappresentativo del bicomplesso (PF).

Cadono ora a proposito alcune considerazioni. Quando $z_2 = 0$ il bicomplesso diviene $z_1 v_1$. Il modulo R è allora nullo e quindi F coincide con la origine delle coordinate. Si ha evidentemente la nota rappresentazione dei numeri complessi. Questa osservazione ci porta a rilevare l'analogia esistente fra la rappresentazione dei numeri reali e dei numeri complessi da un lato e quella dei numeri complessi e dei numeri bicomplessi dall'altro.

Si usa dire che per passare dalla rappresentazione geometrica dei numeri reali a quella dei numeri complessi è necessario uscire dalla retta. Ora, per quel che abbiamo esposto in precedenza, un numero complesso può considerarsi rappresentato da un punto del piano e dall'origine, assunta come fuoco. Quest'ultimo punto, nel caso dei bicomplessi, non coincide con l'origine: possiamo quindi dire che per la rappresentazione dei bicomplessi è necessario uscire col fuoco dall'origine delle coordinate.

Un altro caso speciale è quello dei bireali che si verifica quando z_1 e z_2 sono reali. È facile vedere che in tal caso i vettori di z_1 e z_2 coincidono con due assi coordinati e il fuoco del numero cade sulla loro bisettrice. Il luogo di P sarà un'iperbole equilatera la cui distanza focale da O è $2\sqrt{z_1 z_2}$. Se ne deduce che in tutti i tessuti ell. ip. i cui fuochi cadono sulle bisettrici degli angoli formati dagli assi coordinati vi è un'iperbole equilatera lungo la quale i bicomplessi rappresentati da quei tessuti divengono dei numeri bireali.

(10) Passiamo ora a considerare i bicomplessi di uguale argomento.

Riprendiamo la formola $e^{\Omega} = t_0 (\cos \alpha_0 + i \sin \alpha_0)$ in cui $t_0 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ e $\alpha_0 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2}$ ($\varepsilon = 0$ per s dispari; $\varepsilon = 1$ per s pari). Affinchè l'argomento sia costante è necessario e sufficiente che t_0 e α_0 siano costanti. In tal caso i parallelogrammi rappresentativi dei bicomplessi sono, per lo stesso s , simili fra loro, avendo i lati proporzionali e l'angolo compreso uguali per tutti. Essi si dividono in 2 gruppi: uno corrispondente a s pari e l'altro

ad s dispari. Gli angoli formati dai vettori di z_1 e z_2 nei due gruppi sono supplementari. Dalle condizioni necessarie e sufficienti sopra riportate si ricava che se z_1 percorre un cerchio, altrettanto farà z_2 , mentre se z_1 percorre un raggio vettore lo stesso avverrà per z_2 . Nel primo caso, riferendo le coordinate x e y di P agli assi $OV_1, -OV_2$, questo descriverà il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = r_1^2 \frac{1 + t_0^2 \pm 2t_0^2 \sin 2\alpha_0}{t_0^2}$ e nel secondo caso la retta $\frac{y}{x} = \frac{t_0^2 \sin \omega_1 \pm \cos(\omega_1 - 2\alpha_0)}{t_0^2 \cos \omega_1 \mp \sin(\omega_1 - 2\alpha_0)}$ dove il segno superiore vale per s pari e quello inferiore per s dispari.

Riferendo questi risultati alla forma (4) del bicomplesso si vedrà facilmente che la prima formola corrisponde al *fattore bireale costante* e la seconda alla *base costante*.

I fasci di cerchi concentrici e di raggi vettori, di cui sopra, determinano un sistema di coordinate curvilinee che si può indicare con la notazione $r_1 = \text{cost.}$ $\omega_1 = \text{cost.}$, ovvero con $f = \text{cost.}$ $b = \text{cost.}$, e che s'identifica col *tessuto circolare*, il quale può essere assunto a rappresentare i bicomplessi di uguale argomento. Ma è evidente che, se non si fissa qualche altro elemento geometrico, questo tessuto non si differenzia per le infinite classi di bicomplessi di uguale argomento. Vediamo di introdurre questo elemento. Abbiamo visto che il tessuto ell. ip. è individuato dal fuoco F che, nella rappresentazione di GAUSS, dà, a meno di un fattore costante, il modulo R . Orbene, introdurremo ora un punto che abbia un analogo carattere. Consideriamo il punto rappresentativo del numero complesso $t_0(\cos \tau + i \sin \tau)$, dove $\tau = \alpha_0 + \varepsilon \frac{\pi}{4}$, riferito all'asse OV_1 . Si vede subito che tale numero equivale a $e^{\varepsilon \frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\Omega}$ e quindi il punto suddetto rappresenta, a meno di un fattore costante dipendente da s , l'esponentiale dell'argomento Ω . Indicheremo con C il punto stesso e lo chiameremo *discriminante* del tessuto circolare. Si riscontra facilmente che il vettore OC forma con la bisettrice dell'angolo V_1OV_2 l'angolo $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$.

Concludendo, un bicomplesso può essere geometricamente rappresentato nel piano da due punti P e C , dei quali il primo rappresenta il suo vertice e l'altro il tessuto circolare di tutti i bicomplessi di argomento uguale a quello del bicomplesso considerato. Le coordinate curvilinee passanti per P daranno r_1 ed ω_1 e quindi $r_2 = \frac{r_1}{t_0^2} = \frac{r_1}{OC^2}$ $\omega_2 = \omega_1 - 2\alpha_0 - \varepsilon\pi = \omega_1 - 2\tau - \varepsilon \frac{\pi}{2}$. Così saranno conosciuti tutti gli elementi necessari alla costruzione del parallelogramma rappresentativo del bicomplesso (PC).

(11) Abbiamo visto da quanto esposto fin qui, che un bicomplesso può essere geometricamente individuato dal suo vertice P e da uno dei due punti F e C determinanti rispettivamente il tessuto ell. ip. e quello circo-

lare. Ma esso può essere individuato anche da questi due ultimi punti che rappresentano, nel piano di GAUSS, a meno di un fattore, i numeri complessi R e e^{Ω} . Questa rappresentazione è utile quando il bicomplesso sia dato sotto la forma polare (3), cioè quando siano dati il modulo e l'argomento di esso.

(12) Ed ora accenniamo alla rappresentazione dei bicompleksi nell' S_4 reale adottando le coordinate polari invece di quelle cartesiane. Siano P_1 e P_2 i punti che rappresentano, in coordinate polari, $s+is_1$ e $t+it_1$, su due piani opposti del sistema di coordinate nell' S_4 stesso; r_1 e r_2 i moduli e ω_1 e ω_2 gli argomenti dei bicompleksi anzidetti. L'immagine del bicomplesso si ottiene, come è noto, intersecando i piani passanti per P_1 e P_2 e paralleli rispettivamente ai piani coordinati sopra menzionati. Conduciamo nel piano OP_1-OP_2 , dall'origine O , la retta P_1P parallela a OP_2 e la retta P_2P parallela a OP_1 : il loro punto d'incontro P si troverà evidentemente sulla retta rappresentativa del bicomplesso. Avremo così che il parallelogramma costruito sui lati OP_1 , OP_2 determina un punto di questa retta e quindi la retta stessa, la quale dovrà condursi parallelamente ai piani coordinati suddetti, contemporaneamente.

Notiamo subito che il quadrato della distanza di questa immagine dalla origine, essendo data da $s^2+s_1^2+t^2+t_1^2$, risulta uguale a $r_1^2+r_2^2$ e quindi il quadrato del modulo del bicomplesso, come definito nell'Analisi, uguaglia la somma dei quadrati dei moduli circolari delle coordinate del bicomplesso stesso. Ciò concorda con la proprietà per la quale se due varietà sono perpendicolari, come è il caso dei piani coordinati di cui sopra, ogni retta dell'una è sempre perpendicolare ad ogni retta dell'altra e quindi OP_1 è perpendicolare a OP_2 .

Tutto ciò premesso, è facile applicare quanto dicemmo relativamente alla distinzione dei bicompleksi di ugual modulo e quelli di uguale argomento, a questa rappresentazione nell' S_4 reale. Per i primi si troverà che, quando P_1 e P_2 percorrono dei cerchi nel proprio piano, il luogo delle loro immagini è un cilindro indefinito con l'asse passante per O e con le generatrici parallele ai piani suddetti contemporaneamente e ugualmente distanti dall'asse, mentre quando P_1 e P_2 percorrono delle rette nei rispettivi piani, il luogo delle loro immagini è un cilindro analogo ma a sezione iperbolica. Per i secondi si troverà che quando P_1 e P_2 percorrono dei cerchi nel proprio piano, il luogo delle loro immagini è un cilindro indefinito come nel caso precedente, mentre quando essi percorrono delle rette nei piani stessi, il luogo delle loro immagini è un piano passante per l'origine, e queste immagini sono parallele ai due piani coordinati, contemporaneamente.

Capitolo III.

FUNZIONI TOTALMENTE DERIVABILI NELL'ALGEBRA ($v_1 v_2$)

(13) Sappiamo che una funzione totalmente derivabile di un bicomplesso $z_1 v_1 + z_2 v_2$ deve avere la forma $f_1(z_1) v_1 + f_2(z_2) v_2$ dove f_1 e f_2 indicano funzioni della sola z_1 e della sola z_2 . Diamo un incremento infinitesimo $dz_1 \cdot v_1 + dz_2 \cdot v_2$ alla variabile. In corrispondenza la funzione data subirà l'incremento $f_1'(z_1) dz_1 \cdot v_1 + f_2'(z_2) dz_2 \cdot v_2$ che può anche scriversi $[f_1'(z_1) v_1 + f_2'(z_2) v_2] [dz_1 \cdot v_1 + dz_2 \cdot v_2]$. Il suo modulo è uguale al prodotto dei moduli dei fattori (v. n. 6), cioè a $\sqrt{f_1'(z_1) \cdot f_2'(z_2)} \sqrt{dz_1 \cdot dz_2}$. Di conseguenza si ha: *Il rapporto dei moduli degli incrementi infinitesimi di una funzione totalmente derivabile e della variabile corrispondente tende ad una quantità finita dipendente solo dalla variabile stessa, e questa quantità uguaglia il modulo della derivata prima della funzione.*

Se Ω_1' è l'argomento dell'incremento $dz_1 \cdot v_1 + dz_2 \cdot v_2$ della variabile, Ω_1'' quello della derivata prima $f_1'(z_1) \cdot v_1 + f_2'(z_2) \cdot v_2$ della funzione data, e Ω_1 quello del prodotto dell'incremento e della derivata suddetti, cioè dell'incremento $df_1 \cdot v_1 + df_2 \cdot v_2$ della funzione, per la proprietà espressa al n. 6 secondo la quale l'argomento di un prodotto è uguale alla somma degli argomenti dei fattori presa con l'indice risultante degli indici di essi, si avrà $\Omega_1 - \Omega_1' = \Omega_1''$ e quindi:

La differenza fra l'argomento del differenziale di una funzione totalmente derivabile e quello dell'incremento infinitesimo della variabile tende ad una quantità indipendente dagli incrementi suddetti, e questa quantità uguaglia l'argomento della derivata prima della funzione, essendo s la risultante degli indici s' e s'' degli argomenti della derivata prima della funzione e dell'incremento della variabile.

(14) Una serie di potenze intere di una variabile bicomplexa $z_1 v_1 + z_2 v_2$ avrà la forma $S_1 v_1 + S_2 v_2$ essendo S_1 una serie di potenze intere della sola z_1 e S_2 una serie analoga della sola z_2 . Affinchè la serie data sia convergente, è necessario e sufficiente che siano convergenti ambedue le serie anzidette. Se ρ_1 e ρ_2 sono i raggi dei loro cerchi di convergenza, i moduli circolari di z_1 e z_2 dovranno essere inferiori a ρ_1 e ρ_2 , cioè, interpretando geometricamente questa condizione, i vertici z_1 e z_2 del parallelogramma rappresentativo della variabile devono muoversi all'interno dei cerchi suddetti. Se la variabile è data sotto forma polare, dovrà essere $r_1 < \rho_1$, $r_2 < \rho_2$, quindi $r_1 r_2 < \rho_1 \rho_2$, cioè $r_0 < \sqrt{\rho_1 \rho_2}$. Poichè $r_0 = \frac{OF}{2}$, il fuoco deve cadere entro il cerchio di raggio $2\sqrt{\rho_1 \rho_2}$. Questa condizione non è però sufficiente, in quanto r_1 o r_2 potrebbe essere maggiore di ρ_1 o di ρ_2 . Ma potremo trovare

un semplice criterio di convergenza introducendo il *fattore bireale* $r_1 v_1 + r_2 v_2$. Le condizioni $r_1 < \rho_1$, $r_2 < \rho_2$, significano allora che il vertice del bireale deve cadere nel rettangolo di lati ρ_1 e ρ_2 costruito sugli assi coordinati corrispondenti OV_1 e OV_2 . Questa condizione è evidentemente sufficiente. Dunque: *Perchè una serie di potenze intere di una variabile bicomplexa sia convergente, è necessario e sufficiente che il punto rappresentativo del fattore bireale della variabile cada entro il rettangolo di lati ρ_1 e ρ_2 costruito sugli assi OV_1, OV_2 , essendo ρ_1 e ρ_2 i raggi di convergenza delle serie S_1 e S_2 .* Di qui appare chiara l'analogia del fattore bireale con il modulo dei numeri complessi.

(15) Passiamo ora alla rappresentazione geometrica delle relazioni che intercedono fra l'incremento $dz_1 \cdot v_1 + dz_2 \cdot v_2$ di una variabile bicomplexa e quello $df_1 \cdot v_1 + df_2 \cdot v_2$ di una sua funzione totalmente derivabile.

Potremo porre:

$$dz_1 = d\mu_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \quad dz_2 = d\mu_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$df_1 = dv_1 (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1) \quad df_2 = dv_2 (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2)$$

e ancora:

$$f'_1(z_1) = m_1 (\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1) \quad f'_2(z_2) = m_2 (\cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2).$$

Il fattore bireale dell'incremento della variabile, di quello della funzione e quello della sua derivata prima saranno rispettivamente:

$$d\mu_1 \cdot v_1 + d\mu_2 \cdot v_2 \quad dv_1 \cdot v_1 + dv_2 \cdot v_2 \quad m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (6)$$

Il rapporto dei due primi dà: $\frac{dv_1}{d\mu_1} \cdot v_1 + \frac{dv_2}{d\mu_2} \cdot v_2$. Ma si sa dall'Analisi che per una funzione $f(z)$ olomorfa in un certo campo, il rapporto dei moduli di df e di dz tende, per uno stesso valore di z , al modulo della derivata prima della funzione stessa, comunque la variazione avvenga. Avremo dunque $\lim \frac{dv_1}{d\mu_1} = m_1$, $\lim \frac{dv_2}{d\mu_2} = m_2$ e quindi $\lim \frac{dv_1 \cdot v_1 + dv_2 \cdot v_2}{d\mu_1 \cdot v_1 + d\mu_2 \cdot v_2} = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Concludendo possiamo dire: *il rapporto fra il fattore bireale dell'incremento di una funzione totalmente derivabile e quello dell'incremento della variabile tende, per uno stesso valore di questa, al fattore bireale della derivata prima della funzione in z , comunque la variazione della variabile avvenga.* Anche da questa proprietà appare chiaramente l'analogia tra il fattore bireale di un bicomplexo ed il modulo di un numero complesso.

Diciamo $d\mu_0, dv_0, m_0$ i moduli ip. dei fattori bireali (6) e $e^{\partial} = l'_0$, $e^{\gamma} = l''_0$, $e^{\theta} = t_0$ gli esponenziali degli argomenti. La relazione $\lim \frac{dv_1 \cdot v_1 + dv_2 \cdot v_2}{d\mu_1 \cdot v_1 + d\mu_2 \cdot v_2} =$

$$= m_1 v_1 + m_2 v_2 \text{ diviene } \lim. \frac{dv_0 (e^{\gamma} v_1 + e^{-\gamma} v_2)}{d\mu_0 (e^{\delta} v_1 + e^{-\delta} v_2)} = \frac{dv_0}{d\mu_0} (e^{\gamma-\delta} v_1 + e^{-\gamma+\delta} v_2) =$$

$$= m_0 (e^{\theta} v_1 + e^{-\theta} v_2), \text{ donde } \lim \frac{dv_0}{d\mu_0} = m_0, \quad e^{\gamma-\delta} = e^{\theta}, \text{ cioè } \frac{t''_0}{t'_0} = t_0. \text{ Poichè (n. 9)}$$

il modulo ip. del fattore bireale è uguale a $\frac{OF'}{2}$ e (n. 10) l'esponentiale del

suo argomento è uguale a OC , indicando con F', F'', F i fuochi dei tessuti ell. ip. e con C', C'', C i punti discriminanti dei tessuti circolari relativi rispettivamente all'incremento della variabile, a quello della funzione e alla sua derivata prima, si avrà $\lim. \frac{OF''}{OF'} = \frac{1}{2} OF' \quad \lim. \frac{OC''}{OC'} = OC$.

Sappiamo (n. 9) che gli angoli di OF', OF'', OF con la bisettrice dell'angolo $V_1 O V_2$ sono dati rispettivamente da $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$. Ne se-

gue che l'angolo formato da OF'' con OF' è dato da $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} + \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}$. Ma $\beta_1 - \alpha_1$ e $\beta_2 - \alpha_2$ sono gli angoli formati dai vettori $dv_1, d\mu_1$ e $dv_2, d\mu_2$ rispettivamente, i quali, per le proprietà della rappresentazione conforme citata innanzi, tendono, per valori fissi di z_1 e z_2 , agli angoli che i vettori di m_1 e m_2 formano con gli assi OV_1, OV_2 , cioè agli angoli γ_1 e γ_2 ; quindi $\lim. F'' OF' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, vale a dire che l'angolo di OF'' con OF' tende a quello che OF fa con la bisettrice di $V_1 O V_2$.

Con analogo procedimento, riferendoci al n. 10, si troverebbe che $\lim. C'' OC' = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$, cioè che l'angolo di OC'' con OC' tende a quello che OC fa con la bisettrice di $V_1 O V_2$.

Dunque, a parità della variabile, tanto i triangoli $F'' OF'$, quanto i triangoli $C'' OC'$, relativi a qualsivoglia incremento della variabile stessa, sono simili.

NOZIONI INTRODUTTIVE ALLA TEORIA DELLE IPERSUPERFICIE ALGEBRICHE
DI INDICE n DELL' S_r PROIETTIVO COMPLESSO ¹⁾

Nota VIII del socio ordinario Nicolò Spampinato

(Adunanza del dì 1. dicembre 1951)

Sunto. — S'introducono nell' S_r proiettivo complesso le falde t -dimensionali generali, aventi per origine il sostegno O_h di una varietà unirazionale V_h , con $h < t, o$, in particolare, un punto O_0 . Tali enti, di pertinenza della Geometria birazionale sopra una varietà algebrica ordinaria a t dimensioni, intervengono, come i rami per una curva algebrica ordinaria, quando si vuole fissare la determinazione birazionale di una tale varietà, e nella determinazione generale di una W_{r-1} , di indice di algebricità qualunque, di S_r e di una W_{h-1} , di indice di algebricità qualunque, di una varietà algebrica ordinaria di dimensione k .

49. *Falde generali di S_r con l'origine nel sostegno di una varietà unirazionale.*

Nel n. 47 della nota precedente abbiamo definita una falda semplice o multipla ρ'_i , dell' S_r proiettivo complesso, avente per origine un punto $X'(\omega'_j)$ mediante le equazioni parametriche (n. 48):

$$(**) \quad \omega_j = \omega'_j + \sum_{h_1, \dots, h_t}^{0 \dots \infty} a^{(j)}_{h_1 \dots h_t} h_1 \dots h_t z_1^{h_1} \dots z_t^{h_t} \quad (j=1, 2, \dots, r+1).$$

Ciò al fine di poter definire la funzione $N(X, \rho_i)$ nella coppia punto-falda (X', ρ'_i) , in dipendenza di una data funzione algebrica semiomogenea $y=f(x_1, \dots, x_{r+1})$, funzione che interviene nella *quarta determinazione* della ipersuperficie W_{r-1} , di indice di algebricità n , con il *sostegno* nell'insieme algebrico J_{r-1} , determinato pure da detta funzione semiomogenea con i suoi zeri, poli e punti d'indeterminazione.

Nello stesso n. 47 ho osservato pure che, in modo analogo, si può estendere il concetto di ramo *generale* in quello di falda t -dimensionale *generale*. Ebbene una tale falda la definiamo mediante le seguenti equazioni para-

¹⁾ N. SPAMPINATO, *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso*. Rend. Acc. delle Scienze, Napoli, Vol. I XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, Note I, II, ..., VII.

metriche, più generali delle (**),

$$(***) \quad x_j = \sum_{h_1, \dots, h_t}^{0, \dots, \infty} b^{(j)}_{h_1, \dots, h_t} h_1^{h_1} \dots h_t^{h_t} \quad (j=1, 2, \dots, r+1),$$

con la condizione che esista, nell' S_{2t} euclideo reale, un'iperfera col centro nell'origine (O, \dots, O) e raggio >0 contenuta in ciascuno dei campi totali di convergenza delle $r+1$ serie a secondo membro delle (***), supposte convergenti. I coefficienti b si suppongono non tutti nulli e definiti a meno di un fattore non nullo. Esisterà un intero $s_0 \geq 0$ per il quale i coefficienti b , con $h_1 + \dots + h_t < s_0$ sono tutti nulli, e non sono, invece, tutti nulli quelli per i quali detta somma è eguale ad s_0 . L'intero s_0 è quello che nel caso del *ramo generale*, cioè nel caso $t=1$, abbiamo chiamato *esponente all'origine*.

Indicando con $f_{jm}(z_1, \dots, z_t)$ la somma dei termini di grado m nelle t variabili complesse z_i nella serie che dà la x_j mediante le (***), queste si possono scrivere nella forma:

$$(***) \quad x_j = f_{js_0}(z_i) + f_{js_0+1}(z_i) + f_{js_0+2}(z_i) + \dots \quad (j=1, \dots, r+1).$$

Si osserva ora che se:

$$(1) \quad z_i = c_{i1}\rho + c_{i2}\rho^2 + c_{i3}\rho^3 + \dots \quad (i=1, 2, \dots, t)$$

sono l'equazioni parametriche di un ramo dell' S_t complesso, rappresentato nell' S_{2t} reale euclideo, ed avente per origine il punto (O, \dots, O) , sostituendo nelle (***) si hanno le equazioni parametriche di un ramo generale dell' S_r appartenente alla falda t -dimensionale generale ρ_i di equazioni (***):

$$(2) \quad x_j = g_{js_0}(\rho) + g_{js_0+1}(\rho) + g_{js_0+2}(\rho) + \dots \quad (j=1, 2, \dots, r+1)$$

con $g_{im}(\rho)$ polinomio con tutti i termini di grado m nella ρ (quando non hanno il coefficiente nullo). In particolare risulta:

$$(3) \quad g_{js_0}(\rho) = f_{js_0}(c_{i1}, \dots, c_{it})\rho^{s_0},$$

e quindi tale ramo generale, appartenente alla falda generale, ha per origine il punto $X'(x'_j)$ di coordinate x'_j date da:

$$(4) \quad x'_j = f_{js_0}(c_{i1}, \dots, c_{it}).$$

Agli'infiniti rami dell' S_t complesso, con l'origine nel punto (O, \dots, O) ,

rispondono infiniti rami generali, contenuti nella falda t -dimensionale, che diremo rami naturali di tale falda; la varietà dell' S_r riempita dai punti origini di tali rami può ridursi ad un punto (come avviene sempre se la falda data ha per origine un punto), ma, nel caso generico, è una varietà unirazionale e precisamente quella rappresentata dall'equazioni parametriche:

$$(5) \quad x_j = f_{js_0}(z_1, \dots, z_t) \quad (j=1, 2, \dots, r+1).$$

Il sostegno O_h di tale varietà si dirà l'*origine* della data falda t -dimensionale. Sarà $h < t$, dato che le $f_{js_0}(z_1, \dots, z_t)$ non identicamente nulle sono forme (di grado s_0) nelle z_1, \dots, z_t .

51. Determinazione birazionale di una varietà algebrica ordinaria.

È noto che quando si studiano le proprietà di una curva algebrica ordinaria, che siano invarianti per trasformazioni birazionali, si è costretti a considerare la curva, non come semplice insieme di punti, dello spazio S_r ambiente della curva, ma ciascuno di tali punti, diciamo O_0 , si deve considerare come origine di un ramo ρ_1 appartenente alla curva, in quanto punti distinti possono trasformarsi in punti coincidenti, ma sempre rami distinti in rami distinti. Una curva algebrica V_1 si deve considerare, quindi, nella sua determinazione da dirsi *birazionale*, come un *insieme di coppie punto, ramo*, insieme che indichiamo con $V_1(O_0, \rho_1)$. Si ha allora che: una trasformazione birazionale fra due curve V_1 e V_1' determina una corrispondenza biunivoca SENZA ECCEZIONI fra i due insiemi $V_1(O_0, \rho_1)$ e $V_1'(O_0', \rho_1')$ che danno le determinazioni birazionali delle due curve.

Passando ad una varietà algebrica ordinaria V_k , con $k > 1$, e ad una sua trasformata birazionale V_k' , e indicati con $V(O_0, \rho_1)$ e $V'(O_0', \rho_1')$ gli insiemi delle coppie punto-ramo di V_k e V_k' , la trasformazione birazionale fra V_k e V_k' determina fra detti insiemi una corrispondenza biunivoca che può, però, risultare con eccezioni, perchè un punto di V_k' può essere, per es., il trasformato di una curva eccezionale di V_k e quindi un ramo ρ_1 di V_k appartenente a tale curva eccezionale, non è trasformato in un ramo di V_k' ma in un punto. Ma se si considerano nelle due varietà le coppie origine-falda k -dimensionale, si ha la proprietà fondamentale:

Una trasformazione birazionale fra due varietà algebriche ordinarie V_k e V_k' determina una corrispondenza biunivoca SENZA ECCEZIONI fra i due insiemi $V_k(O_h, \rho_k)$ e $V_k'(O_{h'}, \rho_{k'})$, con $h < k$ e $h' < k$, [che danno le determinazioni birazionali delle due varietà].

Nel seguito chiameremo *elemento h -dimensionale* di una varietà algebrica ordinaria V_k il sostegno O_h di ogni varietà unirazionale V_h , con $h < k$ appartenente alla V_k . Per $h=0$ un elemento O_0 non è altro che un punto di V_k considerato indipendentemente dalla sua molteplicità.

52. *Determinazione generale di una ipersuperficie di indice di algebricità qualunque.*

Consideriamo, in primo luogo, nell' S_r un'ipersuperficie ordinaria V_{r-1} di equazione

$$(6) \quad f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0.$$

Se le (***) sono le equazioni di una falda nel caso particolare $t=r$, con l'origine O_h ($h < r$) sostegno della varietà unirazionale di equazioni parametriche (5), per $t=r$, sostituendo le (***) , ovvero le (****), [nelle quali è messo in evidenza l'esponente all'origine s_0 e dopo di aver diviso per ogni eventuale fattore, comune a tutte le serie, potenza di una z_i] nella forma $f(x_j)$, si ha una serie di potenze nelle r variabili complesse z_1, \dots, z_r .

I termini di grado minimo saranno di grado ms_0 , indicando con m il grado della forma $f(x_j)$. Il numero intero non nullo che si ottiene sottraendo da tale grado minimo l'intero ms_0 , si indicherà con $N(O_h, \rho_r)$. Si viene così ad estendere la funzione numerica $N(X, \rho)$ già definita dalla forma $f(x_j)$ nell'insieme $S_r(X, \rho)$ delle coppie punto-ramo dell' S_r ambiente della V_{r-1} .

Se l'origine O_h della falda r -dimensionale ρ_r non appartiene alla V_{r-1} , risulta $N(O_h, \rho_r) = 0$ perchè i termini provenienti dalla sostituzione nella forma $f(x_j)$ delle (5), [provenienti dai termini di grado s_0 delle (5)] non si annullano tutti. Se invece l'origine O_h della falda appartiene alla V_{r-1} , tale grado minimo sarà certamente $> ms_0$ e quindi sarà $N(O_h, \rho_r) > 0$. Questo valore intero non negativo, si dirà, in ogni caso, *multiplicità d'intersezione della falda ρ_r con la ipersuperficie V_{r-1} nell'origine O_h .*

Se indichiamo con E_{r-1} l'insieme di tutti gli elementi O_h di V_{r-1} , porremo

$$(7) \quad V_{r-1} = [E_{r-1}, N(O_h, \rho_r)]$$

considerando la ipersuperficie ordinaria V come ottenuta dall'associare lo insieme E_{r-1} dei suoi elementi con la funzione numerica $N(O_h, \rho_r)$. Si ha così quella che diremo *determinazione generale* della V_{r-1} , e che risulta legata alla determinazione birazionale dell' S_r ambiente, perchè la funzione $N(O_h, \rho_r)$ risulta definita nell'insieme $S_r(O_h, \rho_r)$ che dà la determinazione birazionale dell' S_r stesso.

Ciò premesso, consideriamo nell' S_r un'ipersuperficie W_{r-1} di indice di algebricità n , rispondente alla funzione semiomogenea definita implicitamente da un'equazione algebrica di grado n , in corrispondenza ad una $(n+1)$ -pla ordinaria di ipersuperficie $V_{r-1}^{(0)}, \dots, V_{r-1}^{(n)}$, fra le quali possono esservi la T e la Ω . In corrispondenza, oltre alla funzione numerica

determinata nel n. 49, avremo la funzione

$$(8) \quad N(O_h, \rho_h) = \Phi [N^{(0)}(O_h, \rho_r), \dots, N^{(n)}(O_h, \rho_r)]$$

sempre *ad n valori razionali relativi*. Mediante questa funzione avremo la *determinazione generale* delle ipersuperficie di indice di algebricità n :

$$(9) \quad W_{r-1} = [E_{r-1}, N(O_h, \rho_r)],$$

ipersuperficie W_{r-1} ottenuta associando all'insieme E_{r-1} degli elementi della ipersuperficie algebrica ordinaria $V_{r-1}^{(0)} + V_{r-1}^{(n)}$, la suddetta funzione numerica definita nell'insieme $S_r(O_h, \rho_r)$.

Nel caso $n = 1$ avremo le *ipersuperficie virtuali nella determinazione generale* come differenza di due ipersuperficie ordinarie

$$V_{r-1}^{(1)} - V_{r-1}^{(0)} = [E_{r-1}^{(0)} + E_{r-1}^{(1)}, N^{(1)}(O_h, \rho_r) - N^{(0)}(O_h, \rho_r)]$$

rispondenti alle funzioni semiomogenee razionali fratte

$$y = - \frac{f^{(1)}(x)}{f^{(0)}(x)}$$

con $f^{(0)}(x_1, \dots, x_{r+1})$ ed $f^{(1)}(x_1, \dots, x_{r+1})$ forme omogenee di gradi n_0 ed n_1 , non entrambi nulle, cioè delle due ipersuperficie $V^{(0)}$ e $V^{(1)}$ una sola può essere la ipersuperficie vuota Ω .

53. La determinazione generale delle W_{k-1} di indice di algebricità n di una varietà algebrica ordinaria.

Quanto s'è detto in relazione all'ambiente S_r si può ripetere sopra, un'ordinaria varietà algebrica V_k di S_r , sostituendo all'insieme $S_r(O_h, \rho_r)$ che dà la determinazione birazionale di S_r , l'insieme $V_k(O_h, \rho_k)$ che dà la determinazione birazionale della V_k . Avremo così, in relazione alla (6), una V_{k-1} della V_k , ottenuta associando all'insieme E_{k-1} degli elementi dell'ordinaria intersezione di V_k con l'ipersuperficie V_{r-1} di equazione (6), una funzione $N(O_k, \rho_k)$, e precisamente quella determinata, nell'insieme $V_k(O_h, \rho_k)$, dalla funzione $y = f(x_j)$ i cui zeri danno i punti della ipersuperficie V_{r-1} . Avremo così la determinazione generale di una V_{k-1} di V_k data da:

$$V_{k-1} = [E_{k-1}, N(O_k, \rho_k)]$$

come intersezione, per subordinazione, di V_k con l'ipersuperficie ordinaria V_{r-1} .

Ciò premesso, in corrispondenza ad una $(n+1)$ pla $[V^{(0)}_{r-1}, \dots, V^{(n)}_{r-1}]$ ordinata di ipersuperficie ordinarie di S_r , che determinano sulla V_k , per subordinazione, la $(n+1)$ pla $[V^{(0)}_{k-1}, \dots, V^{(n)}_{k-1}]$, avremo sulla V_k una W_{k-1} , di indice di algebricità n , nella determinazione generale:

$$W_{k-1} = [E^{(0)}_{k-1} + E^{(n)}_{k-1}, N(O_h, \rho_k)].$$

essendo $E^{(0)}_{k-1}$ ed $E^{(n)}_{k-1}$ gli elementi della prima e l'ultima V_{k-1} della $(n+1)$ pla, ed $N(O_h, \rho_k)$ una funzione ad n valori razionali relativi definita nell'insieme $V_k(O_h, \rho_k)$, che dà la determinazione birazionale della V_k data da:

$$N(O_h, \rho_k) = \Phi[N^{(0)}(O_h, \rho_k), \dots, N^{(n)}(O_h, \rho_k)]$$

avendo posto:

$$V^{(j)}_{k-1} = [E^{(j)}_{k-1}, N^{(j)}(O_h, \rho_k)].$$

Si ricordi che è sempre $h < k$, e che per $h > 0$ l'origine O_h della falda k -dimensionale ρ_k è il sostegno di una varietà unirazionale ad h dimensione appartenente alla V_h .

ALCUNE CARATTERISTICHE DEL CARSIISMO PUGLIESE

Nota del socio ordinario Carmelo Colamonico

(Adunanza del dì 1. dicembre 1951)

Sunto. — Si mettono in risalto, fra le caratteristiche della morfologia carsica della Puglia, insieme con la non ricca disseminazione delle cavità a doline, la loro maggiore diffusione in corrispondenza degli orli dei vari rialti specie nelle Murge e nel Gargano, la notevole frequenza della forma chiusa allungata e il particolare comportamento della idrografia sotterranea, per concludere con l'ipotesi che l'attuale carsismo pugliese sia da ricollegare con un processo remoto dell'attività carsica, interrotto dalla trasgressione marina plio plistocenica.

Fra i tanti elementi fisici che concorrono a determinare l'unità della regione pugliese uno dei più significativi è il carsismo, conseguenza, del resto, della comune impalcatura calcarea per le varie parti della regione e, in complesso, dell'unità della storia geologica della Puglia. Naturalmente, le manifestazioni dell'attività carsica appaiono più evidenti nelle vaste

aree in cui affiorano i calcari compatti del cretaceo e che corrispondono ai tre blocchi del Gargano, delle Murge e delle Serre salentine, degradanti in altitudine dal nord al sud, ma disposti su uno stesso asse longitudinale, con identità di forme e, nel loro insieme, con una netta e spiccata indipendenza orografica. Ora, il processo carsico offre, in ciascuno dei tre nuclei suddetti del rilievo pugliese, manifestazioni comuni, le quali, per essere tutt'altro che frequenti nella generalità delle regioni calcaree, contribuiscono da un lato ad accentuare l'evidenza di cotesti rapporti morfologici fra tutte le parti della Puglia e dall'altro lato a segnalare, in questo tratto del bacino del Mediterraneo, un'area carsica a sè, e di ben vasta estensione, che va appunto distinta col nome di « distretto carsico pugliese ».

Mi fermerò, nella presente nota, a rilevare alcune di tali manifestazioni: a qualcuna di esse, del resto, io stesso ho accennato in altri miei lavori.

Si è, infatti, più volte richiamata l'attenzione degli studiosi sulla relativamente scarsa diffusione, in questi rialti calcarei, della più significativa forma superficiale del carsismo, la conca carsica, sia nelle limitate dimensioni della dolina che nelle grandi cavità del bacino carsico e dei « polia ». Le varie zolle calcaree della Puglia, infatti, non rivelano di solito, pur nei tratti in cui il terreno è uniforme nella sua costituzione e poco o punto accidentato nell'orografia, quella ricca disseminazione di conche carsiche di varia forma e ampiezza, che sappiamo essere così frequente nell'Istria e nella parte occidentale della penisola balcanica. Se, però, manca generalmente l'intensità della manifestazione, non manca, in nessuna zona, il fenomeno in sè, e nei suoi aspetti diversi: doline di tutti i ben noti tipi, bacini carsici pur di dimensioni enormi, cavità profonde fino a più di cento metri. E tanto il fenomeno quanto la sua di solito scarsa diffusione appaiono come caratteristiche comuni sia del Gargano che delle Murge e delle Serre. Tutto ciò, pertanto, se vale a individuare, appunto, una forma particolare di carsismo, non lascia — anche per l'intervento di tutte le altre espressioni del processo carsico — alcun dubbio sulla legittimità di considerare la Puglia come una vera e propria regione carsica.

Peraltro, nella stessa distribuzione topografica delle doline è possibile segnalare un'altra caratteristica del carsismo pugliese: la densità delle forme concave diventa notevole soprattutto in corrispondenza degli orli che limitano i vari pianalti allungati con i quali il Gargano e le Murge degradano nelle zone sottostanti e nel mare. L'allineamento delle varie parti del rilievo della Puglia è diretto da NO a SE, in conseguenza della tettonica della regione, sollevatasi per una spinta orogenetica comune a quella che sollevò la massa fondamentale dell'Appennino; a tale allineamento è probabile che abbia contribuito l'abrasione marina, spianando (in corrispondenza dell'Adriatico e dell'Ionio-valle del Bradano) vari gradini costieri durante l'emersione pliocenica. Su queste forme allungate del rilievo prima

l'erosione normale e poi, con la progressiva asportazione della veste plio-plistocenica, l'attività carsica accentuarono la formazione di orli rialzati, alle spalle dei quali le doline risultano, per l'appunto, assai più numerose del solito. Il fenomeno è molto spiccato nelle Murge, e in esse soprattutto dove i pianalti discendono con forte e netto pendio, e quindi per le Murge settentrionali presso l'orlo che precipita sulla fossa premurgiana e per le Murge meridionali presso l'orlo da cui si scende ripidamente sulla fascia plioplistocenica costiera a sud di Bari.

Collegata geneticamente con i suddetti aspetti del carsismo pugliese appare la caratteristica della diffusa presenza della forma carsica allungata, vale a dire della fossa chiusa e della valle chiusa: e ciò, evidentemente, in relazione da un lato con la tettonica di tutta la regione — come più spiccatamente è visibile nel Gargano e nelle Serre — e dall'altro con la su ricordata opera trasformatrice dell'erosione normale — come è più chiaramente visibile soprattutto nelle Murge —. Se non è facilmente determinabile la superficie della Puglia che fu coperta dalle acque nella trasgressione marina plioplistocenica, è certo che, ad eccezione forse di ben limitate zolle nell'area murgiana e in quella garganica, la regione si rivestì, nel pliocene e nel plistocene, di sedimenti marini vari, dai calcareo-sabbiosi alle argille, dalle marne sabbiose alle sabbie argillose e alle sabbie, e che tali sedimenti, portati ad altezze diverse dal sollevamento plistocenico, dovettero favorire il costituirsi di un'idrografia superficiale che incise valli più o meno profonde. Se non che, per la scarsa potenza di cotesta coltre e per la sua stessa natura, le acque correnti ben presto trasportarono nelle regioni più basse e nel mare i terreni che la costituivano, mettendo a nudo le masse fondamentali calcaree del cretaceo: così, all'erosione di tipo normale ben presto si affiancò e a mano a mano si sostituì, in questi ripiani, l'erosione di tipo carsico, che deve aver disorganizzato la rete idrografica superficiale, moltiplicando le forme chiuse col frazionare le valli di erosione normale in serie di fosse carsiche e di bacini carsici allungati.

Un'altra caratteristica, infine, va sottolineata nel carsismo pugliese, e propriamente in un campo particolare dell'attività carsica, cioè nell'idrografia sotterranea: tale caratteristica consiste da un lato nella quasi assoluta mancanza di risorgenze continentali (e ciò anche nei tratti in cui il terreno precipita per varie centinaia di metri con ripido pendio), e dall'altro lato nella dispersione delle acque provenienti dalla diffusa circolazione carsica mediante infiniti minuti sbocchi lungo la linea di costa presso a poco a livello del mare. È un fatto che, generalmente, nella regione pugliese le coperture di terreni impermeabili costituiscono delle eccezioni, che le acque meteoriche — tranne nei momenti in cui cadono con impeto temporalesco — vengono nella massima parte assorbite nel sottosuolo, che, mentre mancano vere e proprie sorgenti, la fascia costiera rivela, sia sulla spiaggia che, con pozzi comuni, nell'interno, un afflusso verso il mare — livello idrografico di

base di tutta la regione — di innumerevoli veli acquiferi, più o meno lievemente salmastri, a indicare il miscuglio che nell'ultimo tratto della circolazione sotterranea si compie fra le acque carsiche e quelle marine. Anche queste particolarità idrografiche sono comuni a gran parte della Puglia, e propriamente sia al plesso garganico sia alle Murge col litorale barese sia a quasi tutta la penisola salentina; esse non possono non indurre a pensare a uno sviluppo molto avanzato e ad un'origine remota del carsismo pugliese.

Senza risalire, pertanto, all'esame dei problemi che investono la genesi degli altipiani pugliesi e l'intervento, nella loro morfologia, del processo carsico, sulla base dei fatti che sono stati messi qui in risalto è agevole domandarsi se non sia giunto il momento di rivedere la comune opinione sullo scarso sviluppo del fenomeno carsico in Puglia, spiegato fra l'altro con la sua modernità ¹⁾, e di indagare, invece, se non sia la più gran parte dell'attuale carsismo pugliese da ricollegare con un processo remoto, addirittura prepliocenico, dell'attività carsica. A ciò, del resto, si sarebbe indotti dalla considerazione che, avanti la trasgressione plioplastocenica, le masse calcaree pugliesi, emergenti dal mare, dovevano essere, naturalmente, esposte alla diretta azione delle acque meteoriche carbonicate e perciò soggette al processo carsico. E io sono fermamente convinto che ulteriori ricerche speleologiche, soprattutto nelle Murge settentrionali e nel Gargano, riveleranno, come ha fatto per le Murge meridionali l'esplorazione di Castellana, numerose altre manifestazioni del grandioso sviluppo di cavità che, attraverso i millenni, il lavoro delle acque sotterranee è riuscito a compiere nei calcari cretacei della Puglia.

¹⁾ MARINELLI C., *Atlante dei tipi geografici*, 2^a Ed. riveduta ed ampliata a cura di R. ALMAGIÀ, A. SESTINI, L. TREVISAN. Firenze, Ist. Geogr. Mil., 1948; Notezioni, tav. 17.

SULLA FORMULA DI INVERSIONE PER LA TRASFORMATTA DI HANKEL.

Nota del dott. Antonio Zitarosa, presentata dal socio Carlo Miranda

(Adunanza del dì 1. dicembre 1951)

Sunto. — Si dimostra la formula di inversione per la trasformata di HANKEL con nuove ipotesi sul comportamento della funzione trasformanda all' ∞ .

1. È noto ¹⁾ che per la validità delle formule integrali di FOURIER del coseno e del seno sono sufficienti un'ipotesi sul comportamento locale della funzione trasformanda $f(x)$, ed una delle seguenti:

α) la $f(x)$ sia sommabile su $(0, +\infty)$.

β) la $f(x)$ sia sommabile su ogni intervallo finito di $(0, +\infty)$, a variazione limitata in ogni intervallo $(a, +\infty)$, $a > 0$, ed infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.

Nell'ipotesi α) è stata anche dimostrata ²⁾ la seguente formula di inversione per la trasformata di HANKEL:

$$(1) \int_0^{+\infty} J_\nu(tu) \sqrt{tu} du \int_0^{+\infty} J_\nu(ux) \sqrt{ux} f(x) dx = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}, \quad \nu \geq -\frac{1}{2},$$

quando la $f(x)$ sia a variazione limitata in un intorno del punto $x=t>0$.

Una pur accurata ricerca bibliografica non mi ha permesso di constatare che la (1) sia stata dimostrata anche nell'ipotesi β). Questa eventualità, attendibile per il comportamento asintotico della $J_\nu(x)$, è accertata col seguente teorema, che mi propongo di dimostrare:

Una funzione $f(x)$ definita su $(0, +\infty)$ verifichi le seguenti ipotesi:

- a) sia sommabile su ogni intervallo finito di $(0, +\infty)$;
- b) sia a variazione limitata in ogni intervallo $(a, +\infty)$, $a > 0$ ³⁾;
- c) sia infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.

¹⁾ Cfr. p. es. G. VITALI e G. SANSONE. *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte II, pag. 144-145.

²⁾ La dimostrazione, essenzialmente dovuta ad HANKEL, trovasi in: G. N. WATSON. *Theory of Bessel Functions*, II ediz., Cambridge (1944), pag. 456-464; E. C. TITCHMARSH. *Theory of Fourier Integrals*, II ediz., Oxford (1948), pag. 240-242.

³⁾ Ne segue che la $f(x)$ è a variazione limitata in un intorno di ogni punto $x = t > 0$.

Per ogni $t > 0$ vale allora la (1), ove l'integrale esterno e quello interno convergono semplicemente, il primo per quanto riguarda entrambi i limiti, il secondo per quanto riguarda il limite superiore ¹⁾.

Seguiremo lo schema della dimostrazione, nell'ipotesi β), delle formule integrali di FOURIER, incominciando (n. 2) col provare un lemma, analogo al noto lemma di LEBESGUE ²⁾.

2. La formula

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} V\bar{\lambda} \int_{\alpha}^{\beta} J_{\nu}(\lambda x) V\bar{x} f(x) dx = 0$$

è stata dimostrata ³⁾ nell'ipotesi che la $f(x)$ sia sommabile sull'intervallo (α, β) , finito od infinito; ma a noi interessa provare che:

Se $f(x)$ è a variazione limitata in $(\alpha, +\infty)$ ed infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, risulta

$$(3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} V\bar{\lambda} \int_{\alpha}^{+\infty} J_{\nu}(\lambda x) V\bar{x} f(x) dx = 0,$$

l'integrale convergendo semplicemente intorno a $+\infty$.

Nelle ipotesi fatte, la $f(x)$ si può esprimere come differenza di due funzioni non decrescenti, infinitesime per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto, possiamo limitarci al caso di $f(x)$ non decrescente.

Fissato un $\varepsilon > 0$, sia k_0 tale da aversi

$$\left| f(k_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2B},$$

ove abbiamo posto

$$(4) \quad B = \text{estr. sup.}_{u \geq 0} \left| \int_0^u J_{\nu}(t) V\bar{t} dt \right|.$$

Se $k_0 < k$, per un punto ξ di (k_0, k) si avrà, in virtù del secondo teo-

¹⁾ L'ipotesi α), invece, assicura la convergenza assoluta dell'integrale interno, mentre quello esterno converge assolutamente intorno al limite inferiore, semplicemente intorno al limite superiore.

²⁾ Cfr. p. es. op. cit. alla nota ¹⁾ della pagina precedente, pag. 64, 131.

³⁾ Cfr. G. N. WATSON, op. cit., pag. 457.

rema della media ¹⁾

$$(5) \quad \left| \int_{k_0}^k J_v(\lambda x) V \overline{x} f(x) dx \right| = \left| f(k_0) \int_{k_0}^k J_v(\lambda x) V \overline{x} dx \right| \leq \frac{2B}{\lambda^{3/2}} |f(k_0)| < \frac{\varepsilon}{\lambda^{3/2}}.$$

Inoltre, la (2), considerata per l'intervallo (a, k_0) , ci dice che per $\lambda > \lambda_0$ è

$$(6) \quad V \overline{\lambda} \left| \int_a^{k_0} J_v(\lambda x) V \overline{x} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Concludiamo, per le (5), (6), che per λ maggiore di λ_0 e di 2 è

$$V \overline{\lambda} \left| \int_a^{+\infty} J_v(\lambda x) V \overline{x} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

3. Passiamo ora a dimostrare il teorema.

La $f(x)$ sia a variazione limitata nell'intorno $(t-\delta, t+\delta)$ del punto t .

La dimostrazione di HANKEL consiste nel provare che

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} J_v(tu) V \overline{tu} du \int_0^{t-\delta} J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx = 0$$

$$(8) \quad \int_0^{+\infty} J_v(tu) V \overline{tu} du \int_{t+\delta}^{+\infty} J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx = 0$$

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} J_v(tu) V \overline{tu} du \int_{t-\delta}^{t+\delta} J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx = 0,$$

dopo di che la (1) segue immediatamente.

Noi siamo in grado di dimostrare la (7) e la (9) con lo stesso procedimento di HANKEL, perchè abbiamo le ipotesi occorrenti. Ci limiteremo pertanto a provare che nelle nostre ipotesi sul comportamento della $f(x)$ all' ∞ vale ancora la (8), ove però gli integrali esterno ed interno vadano intesi nel senso della convergenza semplice, per quanto riguarda entrambi i limiti ed il limite superiore, rispettivamente.

¹⁾ Vogliamo considerare il secondo teorema della media nella forma datagli dal DE LA VALLÉE-POUSSIN; cfr. p. es. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, II ediz., I vol., Napoli (1946), pag. 260.

Per le ipotesi $a)$ e $b)$, la $f(x)$ si può esprimere, in $(t+\delta, \infty)$, come differenza di due funzioni non decrescenti, infinitesime per $x \rightarrow +\infty$. È dunque lecito supporre $f(x)$ non decrescente.

Sia $\sigma > 0$ e consideriamo i valori $u \geq \sigma$; fissato $\varepsilon > 0$, sia k_0 tale da aversi

$$\frac{2B |f(k_0)|}{\sigma} < \varepsilon,$$

dove B è dato dalla (4).

Se $k_0 < k$, il secondo teorema della media ci assicura che per un punto ξ di (k_0, k) è

$$\left| \int_{k_0}^k J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx \right| = V \overline{u} \left| f(k_0) \int_{k_0}^{\xi} J_v(ux) V \overline{x} dx \right| \leq V \overline{u} \frac{|f(k_0)| 2B}{u^3 t^2} \leq \frac{|f(k_0)| 2B}{\sigma} < \varepsilon,$$

sicchè l'

$$\int_{t+\delta}^{+\infty} J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx$$

converge uniformemente rispetto ad u ; per questo, e per una nota formula ¹⁾ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^{\lambda} J_v(tu) V \overline{tu} du \int_{t+\delta}^{+\infty} J_v(ux) V \overline{ux} f(x) dx = V \overline{t} \int_{t+\delta}^{+\infty} V \overline{x} f(x) dx \int_{\sigma}^{\lambda} J_v(tu) J_v(ux) u du = \\ & = V \overline{t} \left\{ \lambda t J_{v+1}(\lambda t) \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{V \overline{x} f(x) J_v(\lambda x)}{t^2 - x^2} dx - \lambda J_v(\lambda t) \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{x^{3/2} f(x) J_{v+1}(\lambda x)}{t^2 - x^2} dx - \right. \\ & \quad \left. - \sigma t J_{v+1}(\sigma t) \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{V \overline{x} f(x) J_v(\sigma x)}{t^2 - x^2} dx + \sigma J_v(\sigma t) \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{x^{3/2} f(x) J_{v+1}(\sigma x)}{t^2 - x^2} dx \right\} = \sum_{k=1}^4 I_k. \end{aligned}$$

La (8) sarà provata se faremo vedere che

$$(10)_k \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0} I_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Poichè le funzioni

$$\frac{f(x)}{t^2 - x^2}, \quad \frac{x f(x)}{t^2 - x^2}$$

¹⁾ Si tratta della formula (8) a pag. 134 dell'op. cit. del WATSON.

sono ovviamente a variazione limitata in $(t + \delta, \infty)$ ed infinitesime per $x \rightarrow +\infty$, per il lemma del n. 2 avremo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} f(x) J_\nu(\lambda x)}{t^2 - x^2} dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{x^{3/2} f(x) J_{\nu+1}(\lambda x)}{t^2 - x^2} dx = 0.$$

ma queste relazioni equivalgono alle $(10)_1$, $(10)_2$, per il fatto che $\lambda J_{\nu+1}(\lambda t)$ e $\lambda J_\nu(\lambda t)$ sono $O(\sqrt{\lambda})$ per $\lambda \rightarrow \infty$.

Per provare la $(10)_3$, osserviamo che, essendo

$$|J_{\nu+1}(\sigma t)| < 1$$

$$|J_\nu(\sigma x)| < \frac{\text{cost.}}{\sqrt{\sigma x}}$$

risulta

$$|I_3| < \text{cost.} \sqrt{\sigma} \int_{t+\delta}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} f(x)}{t^2 - x^2} dx;$$

ne segue la $(10)_3$.

Infine, andiamo a dimostrare la $(10)_4$.

Se $t + \delta < k$, applicando due volte il secondo teorema della media otteniamo

$$\int_{t+\delta}^k \frac{x^{3/2} J_{\nu+1}(\sigma x) f(x)}{t^2 - x^2} dx = f(t+\delta) \int_{t+\delta}^{\xi} \frac{x^{3/2} J_{\nu+1}(\sigma x)}{t^2 - x^2} dx = f(t+\delta) \int_{t+\delta}^{\xi} \frac{x^{3/2} J_{\nu+1}(\sigma x)}{x^2} \frac{x^2}{t^2 - x^2} dx =$$

$$= f(t+\delta) \left[\frac{(t+\delta)^2}{t^2 - (t+\delta)^2} \int_{t+\delta}^{\eta} \frac{J_{\nu+1}(\sigma x)}{\sqrt{x}} dx - 1 \cdot \int_{\eta}^{\xi} \frac{J_{\nu+1}(\sigma x)}{\sqrt{x}} dx \right];$$

ma è facile convincersi che esiste una costante M tale da aversi, qualunque siano a e $b \geq 0$:

$$\left| \int_a^b \frac{J_{\nu+1}(t)}{\sqrt{t}} dt \right| < M;$$

pertanto risulta

$$\left| \int_{t+\delta}^k \frac{x^{3/2} J_{\nu+1}(\sigma x) f(x)}{t^2 - x^2} dx \right| < \frac{|f(t+\delta)| M}{\sqrt{\sigma}} \left[\frac{(t+\delta)^2}{2/\delta + \delta^2} + 1 \right].$$

Da tale maggiorazione segue subito la $(10)_4$.

Con ciò, il teorema enunciato nel n. 1 resta dimostrato.

ANALOGIA FRA LE LEGGI
DELLA PROPAGAZIONE DEI MOMENTI FLETTENTI NEI TELAI IPERSTATICI
E LE LEGGI DELLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE ELETTRICA
IN UN PARTICOLARE SCHEMA DI CIRCUITI

Nota dell'ing. Ettore Minervini, presentata dal socio corr. A. Galli

(Adunanza del dì 1. dicembre 1951)

Sunto. — Si espone un metodo sperimentale per il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione nei telai iperstatici, piani o spaziali; esso si basa sulle analogie di comportamento che il fenomeno della propagazione dei momenti flettenti presenta con il fenomeno, di natura pur completamente diversa, della propagazione della corrente elettrica lungo particolari circuiti.

Si dimostra la perfetta identità delle leggi che regolano i due fenomeni, da cui consegue la possibilità di sostituire al calcolo analitico la misurazione di grandezze elettriche.

Il calcolo dei telai viene usualmente condotto considerandone i singoli elementi come travi, cioè come strutture che presentano una dimensione preponderante rispetto alle altre due, collegate tra loro da nodi-incastro.

Attraverso condizioni di equilibrio e di congruenza si perviene alla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione relative ad una sezione generica.

I metodi attualmente in uso per il calcolo dei telai (punti fissi, Takabeya, Cross), se pure di applicazione concettualmente semplice, comportano sempre lunghi calcoli concatenati e non escludono la possibilità di errori accidentali; pertanto la effettiva distribuzione dei momenti e delle deformazioni viene individuata dal calcolatore in un tempo non breve, e solo attraverso ripetuti, estenuanti controlli.

Appare quindi di estremo interesse la ricerca e lo studio di fenomeni fisici, facilmente osservabili e misurabili, i quali presentino analogie di comportamento con il fenomeno della propagazione dei momenti flettenti lungo le aste del telaio.

Il fenomeno della propagazione della corrente elettrica lungo particolari circuiti si presenta subito, e sotto molteplici punti di vista, come il più adatto ai nostri scopi: infatti esso si presta ad una facile ed immediata misura, a mezzo di apparecchi già esistenti in commercio; consente previa determinazione di scale, la lettura diretta dei momenti; presenta come dimostreremo, la più completa analogia possibile con il fenomeno della propagazione dei momenti flettenti.

Pertanto il metodo sperimentale che si propone, fondato sulla detta analogia, si riduce ad una serie di misure elettriche le quali hanno sempre un elevato grado di approssimazione, e sembra sin d'ora nettamente preferibile ai metodi analitici, i quali permettono di conseguire risultati non più precisi in un tempo molto maggiore.

Il metodo sperimentale consente infine, attesa la immediatezza dei risultati, la ripetizione del calcolo, opportunamente variando la rigidezza delle aste, così che all'usuale calcolo di verifica, che si limita, per necessità di tempo e di fatica, a fare riferimento ad una sola configurazione delle rigidezze delle aste, si sostituisce la più opportuna modellatura della struttura stessa.

Travi a sezione costante.

Consideriamo una trave appoggiata ad un estremo *A* ed innestata all'estremo *B* in un incastro elastico di deformabilità angolare ε (v. fig. 1).



Fig. 1.

Applichiamo ad *A* una coppia *C*.

Se non ci fosse l'incastro, *B* ruoterebbe di $C\beta$; per effetto dell'incastro l'ampiezza della rotazione è δ_1 , e su di esso nasce la coppia $C' < C$.

Possiamo scrivere:

$$\delta_1 = \varepsilon C' \quad ; \quad \delta_2 = 2\beta C' \quad ; \quad \delta_1 + \delta_2 = C\beta$$

Chiamando γ il rapporto ε/β otteniamo:

$$1) \quad C' = \frac{C}{2 + \gamma}.$$

Determiniamo ora la deformabilità dell'estremo *A*, il che sarà utile nel caso che sia questo estremo a funzionare da nodo-incastro per una trave successiva.

Se non ci fosse l'incastro all'estremo B tale deformabilità sarebbe 2β ; per effetto del momento $\frac{1}{2+\gamma}$, l'estremo B ruota in senso opposto dell'angolo $\frac{1}{2+\gamma} \beta$, cosicchè in definitiva:

$$2) \quad \epsilon = 2\beta - \beta \frac{1}{2+\gamma} = \frac{3+2\gamma}{2+\gamma}.$$

Consideriamo ora una trave innestata ai due estremi A e B in due nodi-incastro e caricata da un carico qualunque. Riferendoci ai simboli ed alla trattazione del testo di Scienza delle Costruzioni di A. GALLI, riportiamo la formole relative al caso ora considerato (fig. 2):

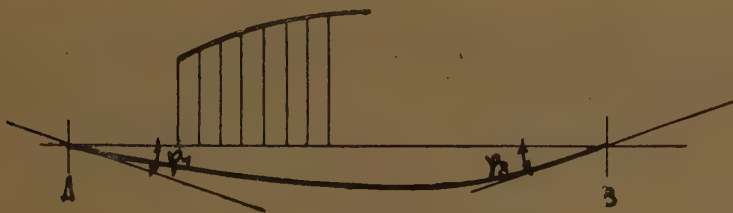


Fig. 2.

$$3) \quad \begin{aligned} \varphi_1 - 2\beta M_1 - \beta M_2 &= \epsilon_1 M_1 \\ \varphi_2 - 2\beta M_2 - \beta M_1 &= \epsilon_2 M_2. \end{aligned}$$

In queste formole φ_1 e φ_2 sono le rotazioni degli estremi A e B sotto il carico, nel caso di trave semplicemente appoggiata; quando i momenti negli estremi delle travi nascono per effetto del solo spostamento normale relativo Δ fra gli estremi, al posto di φ_1 e φ_2 nelle 3) vanno sostituiti i valori $\frac{\Delta}{l}$, rispettivamente $-\frac{\Delta}{l}$. Risolvendo le due equazioni rispetto ad M_1 e M_2 , e chiamando γ_0 il valore $3+2\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_1\gamma_2$, si ricavano:

$$M_1 = \frac{\varphi_1}{\beta} \frac{2+\gamma_2}{\gamma_0} - \frac{\varphi_2}{\beta} \frac{1}{\gamma_0}$$

4

$$M_2 = \frac{\varphi_1}{\beta} \frac{2+\gamma_1}{\gamma_0} - \frac{\varphi_2}{\beta} \frac{1}{\gamma_0}.$$

Consideriamo ora tre conduttori di uguale resistenza elettrica λ (fig. 3) riuniti in punto C .

Il ramo verticale CD è collegato ad un conduttore di resistenza nulla; tra questo conduttore e il secondo ramo CB è inserita una resistenza R ; e infine supponiamo che nel ramo CA passi una corrente i dovuta ad una pila P .

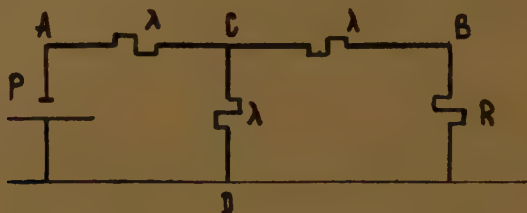


Fig. 3.

La corrente i' che passa nel ramo CB , è funzione del rapporto $\frac{R}{\lambda} = \gamma$, secondo la formula seguente:

$$5) \quad i' = i \frac{1}{2 + \gamma}.$$

La resistenza R potrà essere o una resistenza vera e propria, oppure potrà essere costituita da un altro elemento elettrico a tre rami come quello in esame, così come per una trave si può creare un incastro o mediante un vincolo esterno, ovvero mediante il concorso di una o più aste.

Determiniamo perciò la resistenza complessiva dell'elemento che risulta essere la resistenza del circuito della pila P .

Il suo valore è:

$$6) \quad r = \lambda \frac{3 + 2\gamma}{2 + \gamma}.$$

Dal confronto fra la formula 1) e la 5) e fra la formula 2) e la 6) si giunge alla seguente conclusione:

Si può rappresentare un telaio mediante uno schema di circuiti come quello descritto, se ad ogni asta, di assegnato cui corrisponde un assegnato valore di β sostituiamo un elemento elettrico che abbia la corrispondente resistenza λ proporzionale a β ; e se ad ogni vincolo di data deformabilità ϵ sostituiamo una resistenza R ad essa proporzionale.

Al posto di deformabilità dovremo parlare di resistenza, e al posto di rigidità, di conduttanza.

Lo schema elettrico del caso della trave incastrata elasticamente ai due estremi e caricata da un carico qualunque è illustrato nella fig. 4: determiniamo le correnti che circolano nei due rami CA e CB .

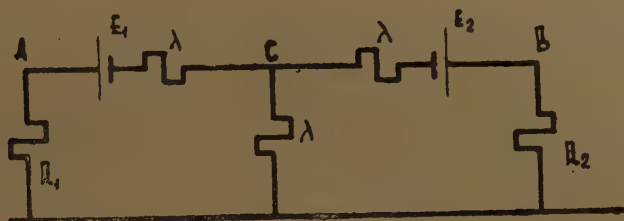


Fig. 4.

Chiamando φ_1 il rapporto $\frac{R_1}{\lambda}$, φ_2 il rapporto $\frac{R_2}{\lambda}$, e φ_0 il valore $3+2\varphi_1+2\varphi_2+\varphi_1\varphi_2$, tali correnti sono:

$$\begin{aligned} i_{CB} &= \frac{E_2}{\lambda} \frac{2 + \varphi_1}{\varphi_0} - \frac{E_1}{\lambda} \frac{1}{\varphi_0} \\ i_{CA} &= \frac{E_1}{\lambda} \frac{2 + \varphi_2}{\varphi_0} - \frac{E_2}{\lambda} \frac{1}{\varphi_0} \end{aligned}$$

Dal confronto fra queste formule e le 4) segue che ad una rotazione corrisponde una forza elettromotrice.

In un elemento elettrico in cui le f. e. m. sono nulle contemporaneamente, le uniche correnti circolanti sono quelle provenienti dai nodi (trave scarica da forze agenti lungo di essa e soggetta a coppie applicate agli estremi); però quando una trave è caricata da una coppia d'estremità, le fibre tese sono ai due estremi da bande opposte, mentre nel relativo schema elettrico, se la corrente proviene dall'esterno, essa conserva la stessa direzione nei due bracci, quindi l'enunciato: « Se la corrente entra, il momento che agisce sulla trave è sinistrorso, e viceversa », è valido per un solo estremo di ogni elemento, mentre per l'altro estremo il momento dovrà intendersi destrorso. Questa è l'unica limitazione che la natura elettrica del sistema ci impone: in base ad esso dovremo differenziare qualitativamente i due estremi, che chiameremo A e B ; e dovranno concurrere nello stesso nodo solo estremi che abbiano lo stesso nome.

Quando il telaio presenti delle maglie triangolari, o più generalmente maglie a numero dispari di lati, si penserà una sezione intermedia di una qualunque delle travi costituenti la maglia, come virtualmente vincolata,

consentendo al corrispondente vincolo la possibilità di spostarsi come nel sistema effettivo. Le modalità con cui si opera questo spostamento saranno descritte in una successiva nota riguardante la pratica applicazione del metodo.

La corrente elettrica come abbiamo visto, nasce e si distribuisce su tutti gli elementi che incontra, esattamente come nasce e si propaga il momento flettente sulle travi di un telaio.

Il principio della sovrapposizione delle correnti, identico a quello della sovrapposizione delle sollecitazioni, ci garantisce che i momenti misurati, anche nel caso di più correnti circolanti, saranno quelli effettivi.

Ma — e ciò è particolarmente interessante — la distribuzione della corrente è quella che corrisponde ai nodi fissi: la corrente non ammette spostamento di nodi!

Quando i nodi sono spostabili, la soluzione del problema è però ancora perfettamente perseguibile: basterà sovrapporre al sistema di correnti relative ai nodi fissi, un sistema di correnti relative ai nodi spostati, imponendo gli spostamenti con la variazione graduale delle f. e. m. applicate, come risulta dalle 4) e 7) e relative annotazioni, fino ad ottenere che i tagli sulle travi raggiungano i valori stabiliti.

L'osservazione fatta, che la corrente non ammette spostamento dei nodi, viene giustificata dalla seguente considerazione: le costanti dei circuiti elettrici, ossia le resistenze, sono indipendenti dalle correnti circolanti, cioè sono effettivamente delle costanti, così come in un telaio, quando i nodi sono fissi, la deformabilità delle aste che corrisponde come sappiamo alla resistenza elettrica, è indipendente dai carichi applicati.

Quando invece i nodi sono spostabili, la deformabilità delle varie aste è funzione della intensità e posizione dei carichi; si comprende quindi come questo caso non possa venir realizzato nel sistema elettrico se non attraverso il particolare procedimento sopra accennato.

Travi a sezione variabile.

Già sappiamo che in una trave a sezione comunque variabile il valore α è diverso a seconda che la coppia unitaria venga applicata all'uno o all'altro estremo, quindi dovremo parlare di α_a e α_b ; questi valori non saranno più uguali a 2β ma $n_1\beta$ e $n_2\beta$.

La trave è dunque caratterizzata da tre costanti: n_1 , n_2 , β .

Le formule scritte finora trovano la loro espressione più generale svolgendo di nuovo la trattazione applicata alle travi a sezione costante:

Momento sull'estremo B di una trave a sezione comunque variabile

(riferirsi sempre alla fig. 1) quando ad A è applicata una coppia C :

$$8) \quad C' = \frac{C}{n_2 + \gamma_2} \text{ e scambiando } A \text{ con } B: C' = \frac{C}{n_1 + \gamma_1}$$

Rotazione dell'estremo A sotto una coppia unitaria:

$$\alpha_a = \beta \frac{n_1 n_2 + n_1 \gamma_2 - 1}{n_2 + \gamma_2} \text{ e dell'estremo } B \text{ quando } A \text{ è incastrato:}$$

$$9) \quad \alpha_b = \beta \frac{n_1 n_2 + n_2 \gamma_1 - 1}{n_1 + \gamma_1}$$



Fig. 5.

Le equazioni corrispondenti alle 8) e 9), determinate sul circuito elettrico di fig. 5, sono, posti

$$n_2 = \frac{\lambda + \lambda_2}{\lambda} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{R_2}{\lambda}$$

$$10) \quad i' = \frac{i}{n_2 + \gamma_2}$$

$$r = \lambda \frac{n_1 n_2 - 1 + n_1 \gamma_2}{n_2 + \gamma_2}$$

Le equazioni corrispondenti alla 4) sono:

$$11) \quad M_1 = \frac{\varphi_1}{\beta} \frac{n_2 + \gamma_2}{\gamma_{12}} - \frac{\varphi_2}{\beta} \frac{1}{\gamma_{12}}$$

$$M_2 = \frac{\varphi_1}{\beta} \frac{n_1 + \gamma_1}{\gamma_{12}} - \frac{\varphi_2}{\beta} \frac{1}{\gamma_{12}}$$

avendo chiamato γ_{12} , il valore $n_1 n_2 - 1 + n_2 \varphi_1 + n_1 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2$.

Le equazioni corrispondenti alle 11) sono:

$$12) \quad \begin{aligned} i_{CB} &= \frac{E_2}{\lambda} \frac{n_1 + \gamma_1}{\gamma_{12}} - \frac{E_1}{\lambda} \frac{1}{\gamma_{12}} \\ i_{AB} &= \frac{E_1}{\lambda} \frac{n_2 + \gamma_2}{\gamma_{12}} - \frac{E_2}{\lambda} \frac{1}{\gamma_{12}}. \end{aligned}$$

Queste formule si riducono a quelle relative alla trave a sezione costante qualora in luogo di n_1 ed n_2 si ponga il valore 2.

Le strutture spaziali.

Un circuito elettrico che rappresenti una trave soggetta a torsione non è difficile immaginarlo: si veda in proposito la fig. 6.



Fig. 6.

Esso è un semplice conduttore di resistenza λ che rappresenta la deformabilità a torsione della trave.

Il circuito soddisfa alle condizioni meccaniche e cioè:

La corrente che entra è uguale alla corrente che esce (momento uguale ai due estremi).

Sotto una data differenza di potenziale, la corrente è inversamente proporzionale alla resistenza (sotto una data rotazione dei due estremi, il momento è inversamente proporzionale alla deformabilità).

Nella figura 3 la resistenza R poteva essere anche rappresentata da un elemento come quello descritto, ed infatti un nodo-incastro, per una trave che lavori a flessione, potrebbe anche essere prodotto da una trave ortogonale che lavora a torsione; è immediata l'estensione agli schemi spaziali costituiti da più telai piani paralleli lavoranti a flessione nel proprio piano, collegati tra loro nei nodi da travi lavoranti solo a torsione.

Nel presente studio è stato messo a punto lo schema elettrico che risolve il problema della pratica applicazione della analogia; in una successiva nota sarà completamente descritta l'attrezzatura sperimentale ad essa conseguente.

L'ALGEBRA A SOMMA DIRETTA DI k ALGEBRE n_i -DUALI

Nota di **Angelo Fadini**, presentata dal socio ordinario **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 2 giugno 1951)

Sunto. — Si studia un'algebra A , somma diretta di k algebre n_i -duali, e si dimostra che l' S_r ipercomplesso legato a tale algebra si può rappresentare mediante una particolare varietà di **SEGRE**.

1. L'ALGEBRA A . — Siano A_1, A_2, \dots, A_k k algebre duali rispettivamente di ordine n_1, n_2, \dots, n_k . Il generico elemento dell'algebra A_i si può scrivere nella forma:

$$[1] \quad x_i = X^{(i)} + \xi^{(i)} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} X^{(i)} &= x_1^{(i)} u_1^{(i)} \\ \xi^{(i)} &= \sum_{j=2}^{n_i} x_j^{(i)} u_j^{(i)} \end{aligned}$$

nelle quali le $x^{(i)}$ sono numeri di un qualunque corpo numerico Γ , che, per fissare le idee, supporremo sia quello complesso; e le $u_j^{(i)}$ sono *unità* che si moltiplicano con la tabella:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} u_j^{(i)} &= u_j^{(i)} \quad u_i^{(i)} = u_j^{(i)} & (i = 1, 2, \dots, k) \\ u_r^{(i)} u_s^{(i)} &= u_s^{(i)} \quad u_r^{(i)} = 0 & (j = 1, 2, \dots, n_i) \\ & & (r, s = 2, 3, \dots, n_i). \end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che tra gli elementi delle k algebre A_i sussistano le relazioni: $x^{(i)} \cdot x^{(i)} = 0$, supponiamo cioè che gli elementi di ciascuna delle k algebre siano nullifici per le altre. Ciò si esprime anche ponendo:

$$u_p^{(i)} u_q^{(j)} = 0 \quad (i \neq j).$$

Diciamo A l'algebra somma diretta delle k algebre A_1, A_2, \dots, A_k ; un elemento di A può essere indicato nel modo seguente:

$$x = \sum_{i=1}^k x_i^{(i)} = \sum_{i=1}^k X^{(i)} + \sum_{i=1}^k \xi^{(i)} = X^* + \xi^*$$

ove si è posto:

$$\sum_{i=1}^k X^{(i)} = X^* \quad ; \quad \sum_{i=1}^k \xi^{(i)} = \xi^*.$$

Gli elementi X^* costituiscono un'algebra D , di ordine k , dotata di modulo, le cui unità si moltiplicano con la tabella:

$$u_i^{(i)} u_j^{(j)} = \begin{cases} u_i^{(i)} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

tale algebra, chiamata dal prof. SPAMPINATO algebra dei numeri k -complessi, si rappresenta con matrici diagonali di ordine k del tipo:

$$D = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & x_1^{(2)} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots x_1^{(k)} \end{pmatrix}$$

Più generalmente però si può rappresentare con matrici diagonali di ordine $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ ottenute ripetendo $x_1^{(1)}$ α_1 volte, $x_1^{(2)}$ α_2 volte e così via sempre in diagonale.

Gli elementi ζ^* costituiscono una zero-algebra Z di ordine:

$$\sum_1^k (n_i - 1) = \sum_1^k n_i - k = N - k$$

È noto che la interpretazione delle zero-algebre come insieme di matrici non può farsi col solito metodo delle matrici μ , perchè queste risultano tutte nulle; ma, almeno per quelle commutative, può farsi con matrici del tipo:

$$Z = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n_1}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{n_2}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_1^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & x_{n_3}^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^{(4)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

caratterizzate dal fatto che se l'elemento di posto (h, k) è diverso da zero risultano tutti nulli quelli della linea k^{ma} . Ovviamente l'ordine delle ma-

trici Z è necessariamente maggiore dell'ordine della zero-algebra che esse rappresentano.

Se x', x'', x''' sono tre elementi di A si ha:

$$\begin{aligned} X'^* X''^* &= X'''^* & \zeta'^* \cdot \zeta''^* &= 0 \\ X'^* \cdot \zeta''^* &= \zeta''^* X'^* = \zeta'''^* \end{aligned}$$

In base a queste formole diremo che l'algebra A è *somma semi-diretta* dell'algebra D e della zero-algebra Z . Dunque:

l'algebra A somma diretta di k algebre A_1, A_2, \dots, A_k n_i -duali ($i=1, 2, \dots, k$) si può anche interpretare come somma semi-diretta dell'algebra k -complessa costituita dai moduli delle algebre A_i e della zero-algebra costituita da tutti gli elementi autonnullifici delle algebre A_i .

2. L'ALGEBRA A COME INSIEME DI MATRICI. Tenendo presente che ogni algebra n -duale può essere interpretata in vari modi come insieme di matrici ¹⁾ si deduce che anche l'algebra A può esser interpretata come insieme di matrici di vario tipo.

Interpretando le k algebre A_1, A_2, \dots, A_k con le trasposte delle matrici μ_{x_i} si ha per l'algebra A la rappresentazione con matrici di ordine N del tipo:

$$M = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ x_2^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{n_1}^{(1)} & 0 & \dots & x_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_2^{(2)} & x_1^{(2)} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & x_{n_2}^{(2)} & 0 & \dots & x_1^{(2)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(3)} & \dots \end{vmatrix}$$

Questa matrice, composta « *in diagonale* » con le k matrici trasposte delle μ_k , corrispondenti alle k algebre A_1, A_2, \dots, A_k , con opportuni scambi di righe e di colonne si può scrivere nella forma:

¹⁾ A. FADINI, *Gli S_p n -duali e le varietà di SEGRE degli S_p biduali*, « Rendiconti dell'Acc. Nazionale dei Lincei », serie 8^a, vol. VIII, fasc. 6^o, (1950).

$$M^* = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & x_1^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & x_1^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ x_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 & x_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ x_3^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & x_1^{(1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{n_1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & x_2^{(2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & x_3^{(2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_1^{(2)} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & x^{(2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_1^{(2)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_2^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(3)} \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{vmatrix}$$

Questa matrice M^* si può ottenere sovrapponendo sulla diagonale della matrice Z della zero-algebra \mathbf{Z} prima la matrice diagonale D di ordine k , successivamente, sempre in diagonale, k matrici degli ordini $n_1-1, n_2-2, \dots, n_k-1$, la prima costituita ripetendo sulla diagonale principale n_1-1 volte l'elemento $x_1^{(1)}$, la seconda ripetendo n_2-1 volte l'elemento $x_1^{(2)}$ e così via.

Se interpretiamo le k algebre A_1, A_2, \dots, A_k con matrici del tipo $M^{(i)}$ allora l'algebra A viene interpretata con matrici di ordine:

$$2(n_1 - 1) + 2(n_2 - 1) + \dots + 2(n_k - 1) = 2(N - k)$$

del tipo:

$$N = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ x_2^{(1)} & x_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_1^{(1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_2^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^{(1)} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{n_1}^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x_2^{(2)} & x_1^{(2)} & \dots & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & x_1^{(2)} & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & x_2^{(2)} & x_1^{(2)} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

composta in diagonale con $N - K$ matrici biduali.

¹⁾ A. FADINI, nota citata.

E poi evidente che oltre alle matrici dei tipi M , M^* ed N si possono costruire matrici di tipo intermedio, nelle quali alcune delle k algebre componenti sono rappresentate da matrici del tipo M ed altre da matrici del tipo M^* . Nascono così per l'algebra A vari tipi di rappresentazioni con matrici di tutti gli ordini compresi fra N e $2(N-k)$.

3. $L'S_r$ NUMERICO PROIETTIVO LEGATO ALL'ALGEBRA A . Adottando le definizioni date dal prof. SPAMPINATO ¹⁾ diremo S_r numerico proiettivo legato all'algebra A , l'insieme delle $(r+1)$ -ple di elementi di A , di caratteristica massima e definite equivalenti se differiscono per un fattore non nullo né divisore dello zero.

Consideriamo un punto di tale S_r , cioè una $(r+1)$ -pla di elementi di A di caratteristica massima e definita a meno di un fattore non nullo né divisore dello zero, e costruiamo la matrice:

$$\| M_1, M_2, \dots, M_{r+1} \|$$

ottenuta affiancando le $r+1$ matrici M rappresentative di $r+1$ elementi di A . Questa si compone di k matrici del tipo:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} x_1^{(i)} & 0 & 0 & y_1^{(i)} & 0 & 0 & \dots & z_1^{(i)} & 0 & 0 \\ x_2^{(i)} & x_1^{(i)} & 0 & y_2^{(i)} & y_1^{(i)} & 0 & \dots & z_2^{(i)} & z_1^{(i)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n_i}^{(i)} & 0 & x_1^{(i)} & y_{n_i}^{(i)} & 0 & y_1^{(i)} & \dots & z_{n_i}^{(i)} & 0 & z_1^{(i)} \end{array} \right\|$$

ognuna delle quali è costituita da una $(r+1)$ -pla di caratteristica massima di numeri n_i -duali e pertanto al variare delle x_i, \dots, y_i, z_i queste k $(r+1)$ -ple descrivono k S_r n_1 -duale, n_2 -duale, \dots , n_k -duale. Sussiste quindi il teorema:

L' S_r numerico proiettivo legato all'algebra A , somma diretta di k algebre n_i -duali ($i = 1, 2, \dots, k$) è la totalità delle k -ple di punti di k S_r n_1, n_2, \dots, n_k -duali.

Questo teorema può essere enunciato in modo diverso definendo una varietà che generalizza le varietà di SEGRE dell' S_r biduale.

Diremo varietà di SEGRE generalizzata la varietà delle k -ple di punti che si vengono a formare associando a k a k , in tutti i modi possibili, i punti di k varietà di SEGRE o di k varietà appartenenti a varietà distinte di SEGRE. In base a tale definizione il teorema precedente si può enunciare nel modo seguente:

¹⁾ N. SPAMPINATO. *Teoria delle caratteristiche in un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi*. Mem. R. Acc. dei Lincei, serie 6^a, vol. IV, fasc. IV (1936).

L' S_r numerico proiettivo legato all'algebra A è la varietà generalizzata di SEGRE avente per spazi generatori le k varietà W^1) che rappresentano negli spazi di dimensione $[(r+1)^{n_i-1} - 1]$ proiettivi biduali i k S_{n_i} numerici proiettivi n_i -duali legati alle k algebre A_i di cui A è somma diretta.

Questo teorema mette in luce l'importanza dello studio delle varietà di SEGRE dello S_r biduale, mediante le quali si possono rappresentare, non solo gli S_r n -duali, come ho mostrato nel lavoro citato, ma anche gli S_r legati alle algebre somme dirette di più algebre n_i -duali con $i = 1, 2, \dots, k$

4. L' S_r PROIETTIVO LEGATO ALL'ALGEBRA A . Diremo S_r proiettivo legato all'algebra A un insieme di elementi che possa mettersi in corrispondenza biunivoca con l' S_r numerico proiettivo legato ad A .

Le rappresentazioni complesse di tale S_r dipendono dal tipo di matrici che si adottano per interpretare l'algebra e scaturiscono in modo ovvio dalle rappresentazioni complesse delle K algebre A_i di cui A è somma diretta.

Adottando le matrici del tipo M ogni algebra A_i è rappresentata da un rn_i -complesso Φ_i di S_{n_i-1} appartenente ad un $S_{N(r+1)-1}$ proiettivo complesso e pertanto l'algebra A risulta rappresentata da un rN -complesso di S_{N-1} appartenente ad un $S_{(r+1)N-1}$ proiettivo complesso ottenuto congiungendo a k a k , in tutti i modi possibili, i k rn_i -complessi Φ_i .

Analogamente adottando le matrici del tipo N ogni algebra A è rappresentata da un rn_i -complesso ψ_i di S_{2n_i-3} appartenente ad un $S_{2(n_i-1)(r+1)-1}$ proiettivo complesso e pertanto l'algebra A risulta rappresentata in un $S_{2(N-k)(r+1)-1}$ proiettivo complesso da un rN -complesso di $S_{2(N-k)-1}$ ottenuto congiungendo a k a k , in tutti i modi possibili, i k rn_i -complessi ψ_i .

¹⁾ Vedi nota a pag. 8.

Processo verbale dell' adunanza del dì 13 gennaio 1951.

Assistono i soci ordinari residenti BAKUNIN, COLAMONICO, DE DOMINICIS, DE LORENZO, D' ERASMO, IMBÒ, NOBILE, SCHERILLO, SPAMPINATO ed i corrispondenti nazionali ORRÙ, PANIZZI, TOLOTTI e ZAPPA. Presiede la vice-presidente BAKUNIN, segretario il socio D'ERASMO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 2 dicembre 1950, che è approvato. Indi comunica i ringraziamenti del dottor Luigi LONGO per le condoglianze espresse dall'Accademia in occasione della morte del padre.

La socia BAKUNIN, nel presentare le scuse del presidente GIORDANI, che, assente da Napoli per motivi di ufficio, non ha potuto presenziare all'adunanza odierna, si dice incaricata da lui di esprimere al socio DE LORENZO i ringraziamenti dell'Accademia per la preziosa opera con tanto amore prestata durante lo scorso anno 1950, sia a vantaggio dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche che della intera Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di cui tenne pure la presidenza generale.

Il segretario dà notizia delle principali deliberazioni prese dal Consiglio Generale della Società nell'adunanza del dì 28 dicembre scorso, riguardo ai bilanci, alla biblioteca e al ripristino dei vari premi accademici. Si decide di rimandare ad una prossima adunanza la discussione relativa alle modifiche dei regolamenti dei vari concorsi a premio.

La Commissione SPAMPINATO, MIRANDA e ZAPPA riferisce sulla nota del dott. Angelo FADINI su *La prima rappresentazione dell' S_1 proiettivo legato ad un'algebra doppia definita nel corpo $C(3)$* , proponendone l'inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia approva.

A voti unanimi sono pure approvate le proposte della Commissione PICONE, MIRANDA e TOLOTTI di accogliere per la stampa nel Rendiconto la nota della dott. Maria BERNABINI, *Sull' integrazione delle equazioni dell'elasticità piana in coordinate curvilinee*, della Commissione PICONE, MIRANDA e D'ERASMO di inserire nel volume in corso degli Atti la memoria della dott. Maria Josepha DE SCHWARZ *Determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso*, lasciando a carico dell'autrice la spesa relativa alla esecuzione delle figure.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente GALLI che scusa l'assenza, una nota del dott. Aldo RAITHEL, *Sulla determinazione delle linee di influenza nei sistemi ad alto grado di iperstaticità*. Il Presidente nomina la Commissione costituita dai soci MIRANDA, TOLOTTI e GALLI, perchè riferisca in una prossima adunanza.

Il socio SPAMPINATO presenta, a continuazione delle sue precedenti ricerche, una nota VII dal titolo *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso*.

Il socio corrispondente ZAPPA presenta, per il Rendiconto, una sua nota riguardante la *Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito*.

Il socio IMBÒ presenta, per lo stesso periodico, una sua nota sulle *Temperature di irrigidimento di attuali lave etnee*.

Il socio corrispondente PANIZZI presenta una nota sua e del dott. Mario PIATTELLI, *Sintesi nel campo delle sostanze steroidi. Nota I: 13-metil-1-chetoperidrofenantrene*.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 febbraio 1951.

Sono presenti il presidente GIORDANI, i soci ordinari residenti BAKUNIN, CACCIOPPOLI, CARRELLI, COLAMONICO, DE DOMINICIS, DE LORENZO, D' ERASMO (segretario), DIAMARE, IMBÒ, MALQUORI, MIRANDA, NOBILE, PIERANTONI, SALFI, SCHERILLO, ed i soci corrispondenti BERETTA, CATALANO, GALLI, PANIZZI, TOLOTTI e ZAPPA.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 13 gennaio, che è approvato.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute sono segnalati i volumi II e III delle Memorie e note dell' Istituto di Geologia applicata dell' Università di Napoli, inviate all' Accademia con richiesta di cambio. L' Accademia decide il cambio col Rendiconto, a cominciare dall' anno 1950.

La Commissione MIRANDA, TOLOTTI e GALLI riferisce sulla nota dell' ing Aldo RAITHEL *Sulla determinazione delle linee di influenza dei sistemi ad atto grado di iperstaticità* proponendone l' accoglimento nel Rendiconto. — L' Accademia approva.

Il socio PIERANTONI presenta una nota del dott. Antonio DE ROSA sulla *Craniologia dei Sanniti moderni*. Il presidente nomina la Commissione PIERANTONI, SALFI e D' ERASMO con l' incarico di riferire in una prossima adunanza.

Il socio corrispondente GALLI presenta una nota dell' ing. Elio GIANGRECO dal titolo *Contributo al calcolo delle strutture scatolari*, ed un' altra del dott. Vincenzo FRANCIOSI *In tema di archi sottili in regime viscoso*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci MIRANDA, GALLI e TOLOTTI, perchè riferisca su entrambi i lavori nella prossima tornata.

Il socio MIRANDA presenta, a nome del socio corrispondente SCORZA, una nota del dott. Giorgio TREVISAN *Su una questione relativa alle strutture distributive*. È incaricata di riferire su di essa la Commissione MIRANDA, CACCIOPPOLI e SCORZA.

Il tesoriere PIERANTONI presenta il bilancio 1950. L' Accademia nomina revisori di esso i soci MIRANDA e CACCIOPPOLI.

Si passa all' aggiornamento dei regolamenti dei vari concorsi a premio,

tenendo presenti le decisioni prese dal Consiglio generale della Società nell'adunanza del 28 dicembre 1950.

Per quanto riguarda il concorso al premio biennale accademico di L. 50.000, da conferirsi all'autore della migliore memoria su tema da assegnarsi alternativamente nel campo delle Scienze naturali ed in quello delle Scienze matematiche, si stabilisce di convocare alle ore 10,45 del prossimo 3 marzo la Sezione di Scienze Naturali per la scelta del tema.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 marzo 1951.

Assistono all'adunanza il presidente GIORDANI, i soci ordinari residenti BAKUNIN, CARRELLI, DE LORENZO, D'ERASMO, DIAMARE, IMBÒ, MIRANDA, NOBILE, PIERANTONI, SCHERILLO, SPAMPINATO, ed i corrispondenti nazionali CATALANO, MONTALENTI, ORRÙ, PANIZZI, TOLOTTI e ZAPPA. Segretario il socio D'ERASMO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 febbraio, che è approvato. Indi presenta il volume 1950 del Rendiconto (XVII della serie 4^a), di cui è stata recentemente ultimata la stampa, e comunica la lettera del presidente del Comitato per le celebrazioni Colombiane, che invita l'Accademia al Convegno internazionale che avrà luogo a Genova dal 15 al 17 marzo. — L'Accademia delibera di inviare la propria cordiale adesione.

Il socio D'ERASMO, tanto in nome proprio che dei colleghi PIERANTONI e SALFI, legge la relazione sulla nota del dott. Antonio DE ROSA, sopra la *Cranitologia dei Sanniti moderni*, proponendone l'accoglimento nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Uguale proposta di accoglimento nello stesso periodico avanzano la Commissione MIRANDA, GALLI e TOLOTTI per la nota del dott. Elio GIANGRECO, *Contributo al calcolo delle strutture scatolari*, e per quella del dott. Vincenzo FRANCIOSI, *In tema di archi sottili in regime viscoso*, nonché la Commissione MIRANDA, CACCIOPPOLI e SCORZA per la nota del dott. Giorgio TREVISAN, *Su una questione relativa alle strutture distributive*. Con distinte votazioni l'Accademia accoglie ad unanimità tutte le note predette.

Il socio corrispondente ZAPPA presenta una nota del dott. Donato GRECO dal titolo *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi*. Viene incaricata di riferire su questo lavoro la Commissione ZAPPA, SPAMPINATO e CACCIOPPOLI.

Il socio MIRANDA presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana*.

Il socio DIAMARE presenta una memoria sua e del dott. A. DE GIROLAMO, *Sul fegato grasso fisiologico*, chiedendone la inserzione nel volume degli Atti. L'Accademia approva, in linea di massima, la stampa, riservandosi

di esprimere la propria opinione nei riguardi delle due tavole (di cui una comprendente due figure a colori) che accompagnano la memoria predetta, dopo che avrà conosciuto con approssimazione la somma necessaria alla esecuzione di esse.

Il socio MIRANDA, nella sua qualità di revisore dei conti, riferisce, anche a nome del consocio CACCIOPPOLI, sul bilancio consuntivo dell'anno 1950, proponendone l'approvazione, con un voto di plauso al tesoriere e al segretario. — L'Accademia approva.

Si stabilisce infine di accogliere la proposta avanzata dalla Sezione di Scienze Naturali relativamente al bando di concorso al premio accademico per il biennio 1951-52, stabilendo come tema del concorso stesso il seguente *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania* e fissando come data di scadenza per la presentazione dei lavori il 31 ottobre 1952.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 aprile 1951.

Presiede l'adunanza il presidente GIORDANI, segretario il socio D'ERASMO. Sono presenti i soci ordinari residenti BAKUNIN, DE DOMINICIS, DE LORENZO, DIAMARE, IMBÒ, MALQUORI, MIRANDA, NOBILE, SALFI, SCHERILLO e SPAMPINATO, il socio ordinario non residente ARMELLINI ed i soci corrispondenti ORRÙ, TOLOTTI e ZAPPA. Scusa l'assenza il socio COLAMONICO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 marzo, che è approvato. Indi comunica una lettera del socio straniero GAYRE, che ringrazia l'Accademia per il volume 1950 del Rendiconto, e un invito della Zoologisch-Botanische Gesellschaft di Vienna a partecipare alla celebrazione del centenario dalla fondazione, che avrà luogo dal 7 al 9 giugno 1951. L'Accademia esprime la sua cordiale adesione.

La Commissione ZAPPA, CACCIOPPOLI e SPAMPINATO riferisce sulla nota del dott. Donato GRECO, dal titolo *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. La Accademia unanime approva.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente IPPOLITO che scusa l'assenza, una nota del prof. A. RUSSO SPENA dal titolo *Contributo sperimentale allo studio dell'efflusso da tubi addizionali cilindrici*. Il presidente affida alla Commissione MIRANDA, GALLI e IPPOLITO l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima tornata.

Il socio corrispondente CATALANO legge la commemorazione del compianto socio Biagio LONGO. A tale commemorazione si scusano di non poter partecipare il Rettore prof. PONTIERI, che ha inviato una lettera di cordiale adesione, nonchè il prof. RODIO, direttore dell'Orto Botanico di Catania; ed assistono la prof. BAMBAGIONI, ordinaria di Botanica agraria a Portici, i proff.

PICCININI, D'ALFONSO ed altri ex colleghi od allievi del commemorato, oltre all'unico figlio di Lui, dott. Luigi LONGO. La commemorazione, seguita con commossa attenzione da tutti i presenti, verrà pubblicata nel Rendiconto insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 maggio 1951.

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente GIORDANI, i soci ordinari residenti BAKUNIN, CACCIOPPOLI, CARNERA, COLAMONICO, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, IMBÒ, MALQUORI, MIRANDA, NOBILE, PIERANTONI e SCHERILLO, il socio ordinario non residente PICONE ed i soci corrispondenti ORRÙ, TOLOTTI e ZAPPA.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 aprile, che è approvato. Indi comunica la dolorosa notizia della morte, avvenuta in Giappone, il 29 gennaio scorso, del prof. Hidezò Simotomai TANAKADATE, che appartenne all'Accademia, in qualità di socio straniero nella sezione di Scienze Naturali, dal 3 dicembre 1927, e dette agli Atti ed al Rendiconto numerosi contributi scientifici nel campo della geomorfologia, della vulcanologia e della sismologia, collaborando anche con i soci DE LORENZO e MONTICELLI e col prof. CAROBBI. Il socio DE LORENZO si associa, ricordandone i principali meriti di uomo e di scienziato.

Il segretario presenta la memoria della dott. Maria Josepha DE SCHWARZ, *Determinazione delle frequenze e delle linee nodali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso*, inserita nel volume in corso degli Atti, della quale è stata recentemente ultimata la stampa, nonchè il nuovo volume dell'Annuario della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli. Informa quindi che è stato richiesto il cambio del Rendiconto accademico da parte delle seguenti Società e Direzioni di periodici: a) Società dei Matematici e Fisici della Croazia; b) Societas Zoologica botanica fennica « Vanamo » di Helsinki; c) *Colloquium mathematicum* di Wroclaw in Polonia. — L'Accademia acconsente.

La Commissione IPPOLITO, MIRANDA e GALLI riferisce sulla nota dell'ing. Andrea RUSSO SPENA, *Contributo sperimentale allo studio dell'efflusso da tubi addizionali cilindrici*, proponendo che il lavoro venga inserito nel Rendiconto. — L'Accademia ne approva a voti unanimi la stampa, con le limitazioni vigenti.

Il socio PICONE presenta una nota del dott. Fernando BERTOLINI dal titolo: *Il teorema della trasformata di Laplace $\alpha > -1$* . — Il presidente nomina la Commissione PICONE, MIRANDA e CACCIOPPOLI perchè riferisca in altra tornata.

Il socio CARNERA presenta, pure per il Rendiconto, una nota del prof. Eugenio GUERRIERI, *Anomalie climatologiche osservate a Napoli tra il 1948*

ed il 1951. — Il presidente incarica di riferire su questo lavoro la Commissione composta dai soci CARNERA, IMBÒ e COLAMONICO.

Il segretario informa che la stampa delle due tavole annesse alla memoria del socio DIAMARE e del dott. A. DE GIROLAMO — presentata nell'adunanza dello scorso marzo per l'inserzione nel volume degli Atti — importerà una spesa complessiva di L. 65.000, secondo il preventivo fornito dalla ditta Zincografica Monzani di Milano. — L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 giugno 1951.

Sono presenti il presidente GIORDANI, i soci ordinari residenti BAKUNIN, CACCIOPPOLI, DE DOMINICIS, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, MIRANDA, PIERANTONI, SALFI, SCHERILLO, SPAMPINATO, il socio ordinario non residente ARMELLINI ed i soci corrispondenti BERETTA, CATALANO, COLUCCI e GALLI.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 5 maggio, che è approvato. Indi comunica che con decreto presidenziale 11 aprile è stata approvata la nomina della prof. Maria BAKUNIN a vice-presidente dell'Accademia per l'anno 1951. Informa poi che sono pervenute richieste di cambio col Rendiconto accademico da parte della Società « *Tensor* » presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Sapporo in Giappone, e da parte dello Istituto di Matematica e Statistica dell'Università di Montevideo. — La Accademia acconsente.

Il presidente esprime i più vivi rallegramenti, suoi e dei colleghi, al socio DIAMARE per l'alta distinzione con cui vennero riconosciuti i risultati della sua lunga attività scientifica con la recente assegnazione del Premio FELTRINELLI conferitogli dall'Accademia dei Lincei.

La Commissione CARNERA, COLAMONICO e IMBÒ riferisce sulla nota del prof. Eugenio GUERRIERI, *Anomalie climatologiche osservate a Napoli tra il 1948 ed il 1951*, proponendone l'inserzione nel Rendiconto.

Uguale proposta di accoglimento nello stesso periodico fa il socio MIRANDA, riferendo, anche a nome dei colleghi PICONE e CACCIOPPOLI, sulla nota del dott. Fernando BERTOLINI sopra *Il teorema della trasformata di Laplace $\alpha > -1$* .

Entrambe le proposte sono accolte all'unanimità dall'Accademia.

Il socio DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Concezioni del mondo antiche e moderne*, e ne discorre.

Il socio DE DOMINICIS presenta due note del dott. Giovanni PETROSINI, una dal titolo *Sui rapporti fra acido ascorbico idrojuglone e altre sostanze rapido-riducenti nel mallo di noce durante la maturazione del frutto*, l'altra: *Per la determinazione del DDT nell'olio di olive*. Il presidente no-

mina la Commissione DE DOMINICIS, BAKUNIN e GIORDANI, con l'incarico di riferire nella prossima tornata.

Il socio SPAMPINATO presenta due sue note per il Rendiconto: una dal titolo *Forma esplicita delle funzioni sen ξ , cos ξ ed e^{ξ} nel campo ipercomplesso*, e l'altra dal titolo *Ipersuperficie e t-ipersuperficie in un S_r ipercomplesso*.

Lo stesso socio SPAMPINATO presenta una nota del dott. Angelo FADINI su *L'algebra A somma diretta di k algebre n_i -duali*. Il presidente incarica la Commissione SPAMPINATO, CACCIOPOLI e ZAPPA di riferire su questo lavoro in altra adunanza.

Avendo constatato che il numero dei soci ordinari presenti all'adunanza, corrispondendo ai due terzi di quelli esistenti, rende valide le deliberazioni per la votazione ai posti di socio vacanti, secondo le norme sancite dall'art. 11 dello Statuto, si passa alle elezioni.

Il presidente comunica che la sezione di Scienze naturali ha deciso alla unanimità di proporre all'approvazione della Classe, per la nomina ad uno dei tre posti vacanti nella categoria di *socio straniero* il nome del prof. Paolo BUCHNER, già titolare di zoologia nella Università di Lipsia.

Il socio segretario legge il parere motivato sopra i requisiti scientifici del candidato proposto, ed il presidente domanda ai soci ordinari presenti all'adunanza se abbiano a proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, il candidato predetto è ammesso a votazione per scrutinio segreto, ottenendo 12 voti favorevoli sopra 13 soci presenti e votanti.

Il presidente proclama quindi eletto socio straniero nella sezione di Scienze naturali il prof. Paolo BUCHNER, avvertendo che, a norma dell'art. 14 dello Statuto, l'elezione sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Si passa quindi alle proposte di nomina fatte dalla sezione di Scienze matematiche.

Il presidente comunica che sono stati proposti alla unanimità, da questa sezione, per la nomina a *soci ordinari residenti*, i candidati seguenti 1) Carlo TOLOTTI; 2) Guido ZAPPA, entrambi soci corrispondenti in quella sezione. Vengono letti i pareri motivati sopra i requisiti scientifici di ciascuno dei candidati proposti, e non avendo alcuno dei presenti chiesto, a domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, sono ammessi a votazione, per scrutinio segreto, i due candidati innanzi elencati.

La votazione ha dato il risultato seguente:

1) prof. Carlo TOLOTTI: 13 voti favorevoli su 13 soci ordinari presenti e votanti,

2) prof. Guido ZAPPA: 13 voti favorevoli su 13 soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletti soci ordinari residenti nella sezione di Scienze matematiche i proff. Carlo TOLOTTI e Guido ZAPPA, ricordando che anche queste elezioni saranno comunicate al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione presidenziale.

Vengono infine ammessi a votazione — conformemente al parere espresso dalla medesima sezione di Scienze matematiche e con la prescritta procedura — i nomi dei due candidati seguenti proposti come *soci corrispondenti*: 1) prof. Attilio COLACEVICH, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte; 2) prof. Gianfranco CIMMINO, titolare di analisi matematica nella Università di Bologna. Avendo entrambi ottenuto l'unanimità dei voti, il presidente li proclama soci corrispondenti nella sezione di Scienze matematiche.

Si autorizza infine il segretario ad accettare, durante il periodo delle ferie estive e con le limitazioni in vigore, le note dei soci di ogni categoria, chè saranno eventualmente presentate per la inserzione nel Rendiconto.

Redatto, letto ed approvato seduta stante il presente processo verbale, l'adunanza è tolta alle ore 12.30.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 novembre 1951.

Presiede il presidente GIORDANI. Assistono i soci ordinari residenti BAKUNIN, CARNERA, COLAMONICO, DE DOMINICIS, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, MALQUORI, MIRANDA, PIERANTONI, SALFI, SCHERILLO, SPAMPINATO, TOLOTTI, ZAPPA, il socio ordinario non residente ARMELLINI e i soci corrispondenti BERETTA, CATALANO, COLUCCI, GALLI, ORRÙ e PANIZZI.

Il segretario comunica:

1) La ministeriale 15 luglio 1951 con la quale il Ministro ha dato corso al provvedimento per la nomina dei proff. Carlo TOLOTTI e Guido ZAPPA a soci ordinari residenti nella sezione di Scienze matematiche e del prof. Paolo BUCHNER a socio straniero nella sezione di Scienze naturali; 2) le lettere dei soci TOLOTTI, ZAPPA, BUCHNER, CIMMINO e COLACEVICH, che ringraziano per la nomina a socio; 3°) la lettera della Zoologisch-Botanische Gesellschaft di Vienna, che ringrazia per la partecipazione dell'Accademia alla celebrazione del Centenario della fondazione; 4°) l'invito della Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale di Parigi alla celebrazione del 150° Anniversario, a cui l'Accademia ha già inviato la sua adesione.

Comunica inoltre che durante le ferie estive furono presentate, per la inserzione nel Rendiconto, le seguenti note dei soci: 1° DE LORENZO G. *Le rondini in Shakespeare*; 2° DE LORENZO G. *Tigri antropofaghe*.

Presenta quindi la memoria DIAMARE e DE GIROLAMO, *Sul fegato grasso fisiologico*, di cui è stata recentemente ultimata la stampa per il volume in corso degli Atti.

Si stabilisce quindi il calendario delle adunanze ordinarie per l'anno

1952, che, in base alle norme consuete, risulta il seguente: gennaio 5, febbraio 2, marzo 1°, aprile 5, maggio 3, giugno 7, novembre 8, dicembre 6.

La Commissione DE DOMINICIS, BAKUNIN e GIORDANI riferisce sulle due note del prof. Giovanni PETROSINI dal titolo *Sui rapporti fra acido ascorbico idrojuglone e altri rapido-riducenti nel mallo di noce durante la maturazione del frutto* e *La determinazione del DDT nell'olio di olive*, proponendo che vengano entrambe accolte per la inserzione nel Rendiconto. Analoga proposta di stampa nello stesso periodico fa la Commissione SPAMPINATO, CACCIOPOLI e ZAPPA per la nota del dott. Angelo FADINI dal titolo *L'algebra A somma diretta di k algebre n_i -duali*.— Con tre distinte votazioni l'Accademia approva a voti unanimi tali proposte.

Il socio DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua breve nota dal titolo: *Ancora le rondini in Shakespeare*.

Il segretario presenta, da parte del socio corrispondente COLACEVICH, che scusa l'assenza, una nota dal titolo *Un problema di ottica strumentale in astronomia*.

Il socio corrispondente GALLI presenta una nota dell'ing. Aldo RAITHEL, *Un metodo di iterazione per la trave su mezzo elastico* e una dell'ing. Ettore MINERVINI, *Analogia fra le leggi di propagazione dei momenti flettenti nei telai iperstatici e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti*. — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci GALLI, MIRANDA e TOLOTTI, con l'incarico di riferire su queste due note nella prossima adunanza.

Il presidente comunica che, avendo il socio PIERANTONI presentato fin dallo scorso giugno le dimissioni dalla carica di tesoriere dell'Accademia, si deve procedere, secondo l'ordine del giorno, alla votazione a scrutinio segreto per la nomina del tesoriere per il triennio 1952-54. La votazione dà il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti 17:

prof. Antonio SCHERILLO, voti 16;

scheda bianca n. 1.

Il presidente proclama eletto tesoriere dell'Accademia il socio SCHERILLO.

Si passa quindi, secondo l'ordine del giorno, alla votazione, pure a scrutinio segreto, per la carica di vice-presidente dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1952, con il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti 17:

prof. Umberto PIERANTONI, voti 16;

prof. Vincenzo DIAMARE, voti 1.

Annunziando tale risultato, il presidente avverte che, a norma dello art. 14 dello Statuto, esso verrà comunicato al Ministero della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Il socio CARNERA domanda la parola per annunciare che lascia, per ragioni familiari, la sede di Napoli per trasferirsi definitivamente a Firenze

Prega quindi l'Accademia di volerlo assegnare alla categoria dei soci ordinari non residenti, e profitta dell'occasione per ringraziare i colleghi della cordialità con cui fu sempre accolto nell'ambiente accademico ed universitario di Napoli e per mandare un mesto saluto alla memoria dei consoci scomparsi. — Il presidente ringrazia il socio CARNERA per le belle parole e per l'opera scientifica così efficacemente svolta durante i lunghi anni in cui fu a Napoli, specialmente nei riguardi dell'Ufficio centrale delle Latitudini.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1. dicembre 1951.

Assistono all'adunanza il presidente GIORDANI, il segretario D'ERASMO, i soci ordinari residenti BAKUNIN, CARNERA, COLAMONICO, DE DOMINICIS, DE LORENZO, IMBÒ, MIRANDA, NOBILE, PIERANTONI, SALFI, SCHERILLO, SPAMPINATO, TOLOTTI, ZAPPA, il socio straniero BUCHNER, ed i corrispondenti nazionali CATALANO, COLACEVICH e PANIZZI.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 novembre, che è approvato. Indi comunica che, nell'adunanza del 23 novembre, il Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti ha nominato tesoriere generale della Società il consocio Antonio SCHERILLO.

Il consocio COLAMONICO presenta ed offre all'Accademia il IV volume delle Memorie di geografia economica comprendente una monografia del prof. L. FRANCIOSA su *La transumanza nell'Appennino centro-meridionale*. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Il socio TOLOTTI, tanto in nome proprio che dei colleghi MIRANDA e GALLI, riferisce sulla nota dell'ing. Aldo RAITHEL, *Un metodo di iterazione per la trave continua su mezzo elastico*, e su quella dell'ing. Ettore MINERVINI, *Analogia fra le leggi di propagazione dei momenti flettenti nei telai iperstatici e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti*, proponendo che siano entrambe accolte per la stampa nel Rendiconto. — L'Accademia, unanime, approva, con le limitazioni vigenti.

Il socio SPAMPINATO presenta, per il Rendiconto, una sua VIII nota sopra le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_n proiettivo complesso*.

Lo stesso socio presenta una nota del dott. Ulderico BENCIVENGA *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo. Il parte bicomplessi*. — Il presidente incarica la Commissione SPAMPINATO, CACCIOPOLI e ZAPPA di riferire su questo lavoro in una prossima adunanza.

Il socio COLAMONICO presenta, per la stampa nel Rendiconto, una sua nota sopra *Alcune caratteristiche del carsismo pugliese*.

Il socio D'ERASMO, tanto in nome proprio che del collega DE LORENZO, presenta una memoria dell'ing. prof. Alberto DUCCI dal titolo *Nuovi contri-*

buti geo-idrologici sull' isola di Capri, corredata da 7 figure intercalatè e 6 tavole, destinata alla pubblicazione nel volume degli Atti. — L'Accademia nomina la Commissione DE LORENZO, D' ERASMO e SCHERILLO perchè riferisca su questo lavoro nella prossima tornata.

Il socio MIRANDA presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, una nota del dott. Antonio ZITAROSA. *Sulla formula di inversione per la trasformata di Hankel*. È dato incarico di riferire su di essa alla Commissione MIRANDA, CACCIOPPOLI e TOLOTTI.

INDICE DEL VOLUME

G. D' ERASMO — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Sc. fisiche e matematiche durante l'anno 1950	Pag. 3
N. SPAMPINATO — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_n proiettivo complesso, Nota VII	» 12
G. IMBÒ — Temperature d' irrigidimento di attuali lave etnee	» 18
G. ZAPPA — Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito	» 22
Concorso al premio biennale accademico per gli anni 1951-52	» 28
L. PANIZZI e M. PIATTELLI — Sintesi nel campo delle sostanze steroidi: Nota I: 1-cheto-13-metil-peridrofenantrene	» 29
A. RAITHEL — Sulla determinazione delle linee di influenza nei sistemi ad alto grado di iperstaticità	» 32
A. DE ROSA — Sulla craniologia dei Sanniti moderni	» 37
V. FRANCIOSI — In tema di archi sottili in regime viscoso	» 51
E. GIANGRECO — Contributo al calcolo delle strutture scatolari	» 62
D. GRECO — I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi	» 74
C. MIRANDA — Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica Hölderiana	» 86
A. RUSSO SPENA — Contributo sperimentale allo studio dell' efflusso da tubi addizionali cilindrici	» 89
G. CATALANO — Commemorazione di Biagio Longo	» 125
G. TREVISAN — Su una questione relativa alle strutture distributive	» 144
F. BERTOLINI — Il teorema della trasformata di Laplace d'ordine $\alpha > -1$	» 146
E. GUERRIERI — Anomalie climatologiche osservate a Napoli tra il 1948 ed il 1950	» 156
G. DE LORENZO — Concezioni del mondo antiche e moderne	» 168
G. PETROSINI — Sui rapporti fra acido ascorbico idrojuglone e altri rapido-riducenti nel mallo di noce durante la maturazione del frutto	» 179
G. PETROSINI — La determinazione del D. D. T. nell' olio di oliva	» 186
N. SPAMPINATO — Ipersuperficie e t-ipersuperficie di un S_n ipercomplesso	» 192
G. DE LORENZO — Le rondini in Shakespeare	» 198
G. DE LORENZO — Tigri antropofaghe	» 210
N. SPAMPINATO — Forma esplicita delle funzioni $\sin \xi$ $\cos \xi$ e e^ξ nel campo ipercomplesso	» 219
M. J. DE SCHWARZ — Determinazione delle frequenze e delle linee no-	

dali di una membrana ellittica oscillante con contorno fisso (<i>Sunto della memoria inserita nel vol. III della 3^a serie degli Atti</i>).	Pag. 226
A. COLACEVICH — Un problema di ottica strumentale in astronomia	» 227
V. DIAMARE e A. DE GIROLAMO — Sul fegato grasso fisiologico (<i>Sunto della memoria inserita nel vol. III della 3^a serie degli Atti</i>)	» 232
G. DE LORENZO — Ancora le Rondini in Shakespeare	» 233
A. RAITHEL — Un metodo di iterazione per la trave su mezzo elastico	» 235
U. BENCIVENGA — Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo. II parte: bicompleksi	» 245
N. SPAMPINATO — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso. Nota VIII	» 259
C. COLAMONICO — Alcune caratteristiche del carsismo pugliese	» 264
A. ZITAROSA — Sulla formula di inversione per la trasformata di Hankel	» 268
E. MINERVINI — Analogia fra le leggi della propagazione dei momenti flettenti nei telai iperstatici e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti	» 273
A. FADINI — L'algebra A somma diretta di k algebre n_i duali	» 281
Processi verbali delle adunanze del dì 13 gennaio, 3 febbraio, 3 marzo, 7 aprile, 5 maggio, 2 giugno, 3 novembre e 1° dicembre 1951	» 287
Indice del volume	» 299

